Corrigé : matrice de covariance (Centrale PC 2022 – extrait)

I Matrice de covariance

I. A –

Q 1. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = \mathrm{cov}(Y_j, Y_i)$ donc Σ_Y est une matrice symétrique.
Le coefficient d'indice (i,j) de la matrice aléatoire $\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)^T$ est égal à $(Y_i - \mathbb{E}(Y_i))(Y_j - \mathbb{E}(Y_j))$ donc l'espérance de ce coefficient vaut $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$, ce qui montre que $\Sigma_Y = \mathbb{E}\Big(\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)^T\Big)$. Ainsi,

$$\Sigma_{Y+U} = \mathbb{E}\Big(\big(Y + U - \mathbb{E}(Y+U)\big)\big(Y + U - \mathbb{E}(Y+U)\big)^T\Big)$$

Or U est constant donc $\mathbb{E}(Y+U) = \mathbb{E}(Y) + U$, ce qui conduit à $\Sigma_{Y+U} = \Sigma_Y$.

Q 2. Notons $M = (m_{i,j})$. Le coefficient Z_i d'indice $i \in [\![1,p]\!]$ de Z vaut $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} Y_k$. Chacun des Y_k possède une espérance donc par linéarité Z_i aussi, et $\mathbb{E}(Z_i) = \sum_{k=1}^{n} m_{i,j} \mathbb{E}(Y_k)$. On reconnait dans cette expression le coefficient d'indice i du produit $M\mathbb{E}(Y)$, donc $\mathbb{E}(Z) = M\mathbb{E}(Y)$.
Une combinaison linéaires de variables aléatoires possédant un moment d'ordre 2 possède elle aussi un moment d'ordre 2 donc les Z_i possèdent un moment d'ordre 2 et donc une covariance, qui vaut par bilinéarité :

$$\mathrm{cov}(Z_i, Z_j) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} m_{i,k} m_{j,\ell} \,\mathrm{cov}(Y_k, Y_\ell)$$

On reconnait dans cette expression le coefficient d'indice (i,j) du produit $M\Sigma_Y M^T$, donc $\Sigma_Z = M\Sigma_Y M^T$.

I. B – Propriété des valeurs propres

Q 3. Par définition de P, $\Sigma_Y = PDP^T$ où D est la matrice diagonale des valeurs propres de Σ_Y.
Or d'après la question précédente, $\Sigma_X = P^T \Sigma_Y P$, donc $\Sigma_X = D$ est bien diagonale.

Q 4. Notons $\Sigma_X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On a $\lambda_i = \mathrm{cov}(X_i, X_i) = \mathbb{V}(X_i) \geqslant 0$ donc les valeurs propres de Σ_Y sont toutes positives.

Q 5. On remarque que la variance totale de Y est la trace de la matrice Σ_Y. Ainsi,

$$\mathbb{V}_T(Y) = \mathrm{tr}(\Sigma_Y) = \mathrm{tr}(P\Sigma_X P^T) = \mathrm{tr}(\Sigma_X) = \mathbb{V}_T(X)$$

car deux matrices semblables ont même trace.

I. C – Étude de la réciproque

Q 6. Considérons n variables aléatoires indépendantes $Z_1, \dots, Z_n$. La matrice Σ_Z est alors diagonale, ses termes diagonaux valant $\mathbb{V}(Z_1), \dots, \mathbb{V}(Z_n)$. Il suffit alors de faire en sorte que $\mathbb{V}(Z_i) = \lambda_i$ pour avoir $\Sigma_Z = D$, ce qui peut être réalisé par exemple lorsque $Z_i \sim \mathscr{P}(\lambda_i)$ si $\lambda_i > 0$, et $Z_i = 0$ si $\lambda_i = 0$.

Q 7. D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale tel que $A = PDP^T$.
D'après la question précédente, il existe une variable aléatoire Z telle que $\Sigma_Z = D$, et d'après la question 2, la variable aléatoire $Y = PZ$ vérifie $\Sigma_Y = P\Sigma_Z P^T = PDP^T = A$.

I. D –

Q 8. $X = \sum_{i=1}^{n} u_i Y_i$ et $Y_1, \dots, Y_n$ possèdent des moments d'ordre 2 donc X aussi, et

$$\mathbb{V}(X) = \mathrm{cov}(X, X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i u_j \,\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = U^T \Sigma_Y U$$

I. E – Image de Σ_{Y}

Q 9. Lorsque $r = n$, la matrice Σ_{Y} est inversible donc $\mathrm{Im}\,\Sigma_{\mathrm{Y}} = \mathbb{R}^n$ et ainsi l'événement $\left[\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}) \in\in \Sigma_{\mathrm{Y}}\right]$ est certain.

Q 10. Σ_{Y} est symétrique réelle donc diagonalisable. Si on note $\mathrm{Sp}(\Sigma_{\mathrm{Y}}) = \{0, \lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ on a

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\,\Sigma_{\mathrm{Y}} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(\Sigma_{\mathrm{Y}} - \lambda_1 \mathrm{Id}) \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(\Sigma_{\mathrm{Y}} - \lambda_k \mathrm{Id})$$

et $\mathrm{Im}\,\Sigma_{\mathrm{Y}} = \mathrm{Ker}(\Sigma_{\mathrm{Y}} - \lambda_1 \mathrm{Id}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(\Sigma_{\mathrm{Y}} - \lambda_k \mathrm{Id})$ donc $\mathrm{Im}\,\Sigma_{\mathrm{Y}}$ et $\mathrm{Ker}\,\Sigma_{\mathrm{Y}}$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q 11. Posons $\mathrm{V}_j^{\mathrm{T}} = (v_1, \dots, v_n)$. Alors

$$\mathbb{V}\Big(\mathrm{V}_j^{\mathrm{T}}(\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}))\Big) = \mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n}\big(v_k \mathrm{Y}_k - v_k \mathbb{E}(\mathrm{Y})\big)\Big) = \mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} v_k \mathrm{Y}_k\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i v_j \,\mathrm{cov}(\mathrm{Y}_i, \mathrm{Y}_j) = \mathrm{V}_j^{\mathrm{T}} \Sigma_{\mathrm{Y}} \mathrm{V}_j = 0$$

car $\mathrm{V}_j \in \Sigma_{\mathrm{Y}}$.

Q 12. Une variable aléatoire à variance nulle est quasi-constante égale à son espérance.
Or $\mathbb{E}\Big(\mathrm{V}_j^{\mathrm{T}}(\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}))\Big) = 0$ donc $\mathbb{P}\Big(\mathrm{V}_j^{\mathrm{T}}(\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y})) = 0\Big) = 1$.

Q 13. D'après la question 10, $\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}) \in \mathrm{Im}\,\Sigma_{\mathrm{Y}}$ si et seulement si pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, $\mathrm{V}_j^{\mathrm{T}}(\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y})) = 0$ donc

$$\left[\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}) \in \mathrm{Im}\,\Sigma_{\mathrm{Y}}\right] = \bigcap_{j=1}^{d}\left[\mathrm{V}_j^{\mathrm{T}}(\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y})) = 0\right] \quad \text{soit} \quad \overline{\left[\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}) \in \mathrm{Im}\,\Sigma_{\mathrm{Y}}\right]} = \bigcup_{j=1}^{d}\overline{\left[\mathrm{V}_j^{\mathrm{T}}(\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y})) = 0\right]}$$

Par sous-additivité, $1 - \mathbb{P}\Big(\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}) \in \mathrm{Im}\,\Sigma_{\mathrm{Y}}\Big) \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{d}\Big(1 - \mathbb{P}\Big(\mathrm{V}_j^{\mathrm{T}}(\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y})) = 0\Big)\Big) = 0$ donc $\mathbb{P}\Big(\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}) \in \mathrm{Im}\,\Sigma_{\mathrm{Y}}\Big) = 1$.