

SÉRIES FACTORIELLES (CENTRALE PC 2009 – EXTRAIT)

Durée : libre

Le problème porte sur l'étude des séries factorielles, séries de fonctions de la forme $\sum a_n \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$.

Les parties I et II traitent d'un exemple, la partie III, indépendante des deux premières, a pour objet l'étude de propriétés de la somme d'une série factorielle convergente sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

I Préliminaires

I. A – Pour tout entier naturel non nul p ; on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u(n, p) = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}$$

I. A. 1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u(n, p)$ est convergente.

I. A. 2) On pose $\sigma(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u(n, p)$. Calculer $\sigma(1)$.

I. A. 3) Pour $p \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $u(n, p-1) - u(n+1, p-1)$ en fonction de p et $u(n, p)$.

I. A. 4) En déduire la valeur de $\sigma(p)$ en fonction de p , pour $p \geq 2$.

I. B – Soient $q \geq 2$ et $N \geq 1$ deux entiers naturels. Donner une majoration du reste $R(N, q) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$ en le comparant à une intégrale.

II Un exemple d'accélération de la convergence

II. A –

II. A. 1) Montrer par récurrence l'existence de trois suites (a_p) , (b_p) et (c_p) d'entiers naturels définies pour $p \geq 2$ telles que, pour tout $x > 0$ et pour tout entier p on ait :

$$\frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^p \frac{a_k}{x(x+1)\cdots(x+k)} + \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\cdots(x+p)}.$$

II. A. 2) Exprimer a_{p+1} , b_{p+1} et c_{p+1} à l'aide de p , b_p et c_p .

II. A. 3) Montrer que pour tout $p \geq 2$, $b_p \geq c_p \geq 0$.

II. A. 4) Calculer a_p , b_p et c_p pour $p = 2, 3$ et 4 .

II. B – On désire calculer une valeur décimale approchée de $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ avec une erreur inférieure ou égale à $\epsilon = 5.10^{-5}$.

II. B. 1) En utilisant la question I. B, déterminer un entier naturel N suffisant pour que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ soit inférieur à ϵ .

II. B. 2) Donner un majorant simple de $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\cdots(n+4)}$ et montrer, à l'aide de tout ce qui précède, comment calculer $\zeta(3)$ pour la même valeur de ϵ avec une valeur de N moins grande que celle trouvée à la question II. B. 1)

II. B. 3) Donner une valeur décimale approchée à ϵ près (par défaut) de $\zeta(3)$ en utilisant ce qui précède.

III Séries factorielles

III.A –

III.A.1) Pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$ on pose :

$$u_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}, \quad v_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x}, \quad w_n(x) = \frac{u_n(x)}{v_n(x)}.$$

Montrer que la série de terme général $\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)$, définie pour $n \geq 1$, est convergente.

III.A.2) En déduire qu'il existe $\ell(x)$ (dépendant de x et strictement positif) tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \ell(x)$.

III.B – Soit (a_n) une suite de complexes et x un réel strictement positif. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n u_n(x)$ est absolument convergente (en abrégé AC) si et seulement si la série $\sum a_n v_n(x)$ est AC.

III.C – On désigne désormais par $\mathcal{A}$ l'ensemble des suites (a_n) indexées par $\mathbb{N}$ telles que la série $\sum a_n u_n(x)$ soit AC pour tout réel x strictement positif.

Soit (a_n) un élément de $\mathcal{A}$. Montrer que :

III.C.1) la fonction f_a définie par : $\forall x > 0, f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$;

III.C.2) la fonction f_a tend vers 0 en $+\infty$.

III.D –

III.D.1) Donner un exemple d'un élément a de $\mathcal{A}$ avec a_n non nul pour tout entier n .

III.D.2) Donner un exemple d'une suite (a_n) qui ne soit pas élément de $\mathcal{A}$.

III.E – Soit a un élément de $\mathcal{A}$.

III.E.1) Montrer que, pour tout entier n la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0, \quad |u'_n(x)| \leq u_n(x) \left(\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) \right).$$

III.E.2) En déduire que la fonction f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.