Corrigé : séries factorielles (centrale PC 2009 - extrait)

I Préliminaires

I. A –

I. A. 1) Puisque $p \geqslant 1$, on a $u(n,p) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série positive $\sum u(n,p)$ converge.

I. A. 2) $u(n,1) = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ et par télescopage $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u(n,p) = 1 - \frac{1}{\mathrm{N}+1}$. En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient $\sigma(1) = 1$.

I. A. 3) Pour $p \geqslant 2$ et $n \geqslant 1$ on calcule : $u(n,p-1) - u(n+1,p-1) = \dfrac{p}{n(n+1)\cdots(n+p)} = pu(n,p)$.

I. A. 4) En sommant pour $n \in \mathbb{N}^*$ on obtient : $\sigma(p-1) - \big(\sigma(p-1) - u(1,p-1)\big) = p\sigma(p)$, soit $\sigma(p) = \dfrac{u(1,p-1)}{p} = \dfrac{1}{p \times p!}$.

I. B – Soit $n \geqslant 2$. Pour tout $t \in [n-1,n]$, $\dfrac{1}{n^q} \leqslant \dfrac{1}{t^q}$ donc $\dfrac{1}{n^q} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{d}t}{t^q}$. On en déduit : $\mathrm{R}(\mathrm{N},q) \leqslant \displaystyle\int_{\mathrm{N}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^q} = \frac{1}{(q-1)\mathrm{N}^{q-1}}$.

II Un exemple d'accélération de convergence

II. A –

II. A. 1) Prouvons l'existence de a_p, b_p et c_p par récurrence forte sur $p \geqslant 2$:

- si $p = 2$, on cherche a_2, b_2 et c_2 vérifiant : $\dfrac{1}{x^3} = \dfrac{a_2}{x(x+1)(x+2)} + \dfrac{b_2x+c_2}{x^3(x+1)(x+2)}$, soit encore : $(x+1)(x+2) = a_2x^2 + b - 2x + c_2$. Il suffit donc de poser $a_2 = 1$, $b_2 = 3$ et $c_2 = 2$;
- si $p \geqslant 3$, on suppose l'existence de ces entiers acquise jusqu'au rang $p-1$. On peut donc écrire :

$$\frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^{p-1} \frac{a_k}{x(x+1)\cdots(x+k)} + \frac{b_{p-1}x + c_{p-1}}{x^3(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)}$$

  et on est amené à chercher a_p, b_p et c_p vérifiant :

$$\frac{b_{p-1}x + c_{p-1}}{x^3(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)} = \frac{a_p}{x(x+1)\cdots(x+p)} + \frac{b_px + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\cdots(x+p)},$$

  soit encore : $(b_{p-1}x + c_{p-1})(x+p) = a_px^2 + b_px + c_p$. Il suffit donc de poser $a_p = b_{p-1}$, $b_p = pb_{p-1} + c_{p-1}$ et $c_p = pc_{p-1}$.

II. A. 2) En réindexant, nous avons obtenu les relations : $a_{p+1} = b_p$, $b_{p+1} = (p+1)b_p + c_p$, $c_{p+1} = (p+1)c_p$.

II. A. 3) Clairement, $c_p = p! \geqslant 0$. Nous avons donc : $\forall p \geqslant 3$, $b_p \geqslant pb_{p-1}$, inégalité qui permet de prouver sans peine par récurrence que $b_p \geqslant p!$.

II. A. 4) On a $c_2 = 2$, $c_3 = 6$ et $c_4 = 24$, ce qui permet de calculer $b_2 = 3$, $b_3 = 11$, $b_4 = 50$ puis $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 11$.

II. B –

II. B. 1) Pour que le reste au rang N soit inférieur à 5.10^{-5} il suffit que $\dfrac{1}{2\mathrm{N}^2} \leqslant 5.10^{-5}$, soit $\mathrm{N} \geqslant 100$.

II. B. 2) Utilisons la question II. A pour écrire :

$$\frac{1}{n^3} = \frac{a_2}{n(n+1)(n+2)} + \frac{a_3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{a_4}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{b_4n + c_4}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

et sommons. On obtient : $\zeta(3) = a_2\sigma(2) + a_3\sigma(3) + a_4\sigma(4) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_4n + c_4}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

Lorsqu'on approche $\zeta(3)$ par $a_2\sigma(2)+a_3\sigma(3)+a_4\sigma(4)+\sum_{n=1}^{N}\frac{b_4n+c_4}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$, l'erreur commise vaut :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{b_4n+c_4}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\leqslant b_4\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}+c_4\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^7}\leqslant\frac{b_4}{5N^5}+\frac{c_4}{6N^6}$$

Quelques essais à la machine permettent de constater que pour $n\geqslant 12$ on a $\frac{b_4}{5N^5}+\frac{c_4}{6N^6}\leqslant 5.10^{-5}$; on peut donc approcher $\zeta(3)$ à la précision ϵ par : $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{11}{96}+\sum_{n=1}^{12}\frac{50n+24}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

II. B. 3) L'application numérique donne $\zeta(3)\approx 1,202038515$. Le reste étant à l'évidence positif, ceci constitue bien une approximation par défaut.

III Séries factorielles

III. A –

III. A. 1) On calcule $\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}=\frac{n}{x+n}$ et $\frac{v_{n-1}(x)}{v_n(x)}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^x$ donc :

$$\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)=\ln\left(\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right)+\ln\left(\frac{v_{n-1}(x)}{v_n(x)}\right)=-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ce qui prouve la convergence absolue de $\sum\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)$.

III. A. 2) Par télescopage, $\sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)=\ln w_n(x)-\ln w_0(x)$ donc la suite $\big(\ln w_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\alpha(x)\in\mathbb{R}$, ce qui prouve que la suite $\big(w_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell(x)=\mathrm{e}^{\alpha(x)}>0$.

III. B – Sachant que $\ell(x)$ ne s'annule pas, on a à la fois $a_nu_n(x)=\mathrm{O}\big(a_nv_n(x)\big)$ et $a_nv_n(x)=\mathrm{O}\big(a_nu_n(x)\big)$, ce qui prouve que $\sum|a_nu_n(x)|$ converge si et seulement si $\sum|a_nv_n(x)|$ converge.

III. C –

III. C. 1) Soit $\alpha>0$. La fonction u_n étant décroissante, nous avons sur l'intervalle $[\alpha,+\infty[$: $\|a_nu_n\|_\infty=|a_nu_n(\alpha)|$. Puisque $a\in\mathscr{A}$, la convergence est normale (donc uniforme) sur cet intervalle.
Chacune des fonctions u_n étant continue, la fonction f_a est elle aussi continue sur chacun des intervalles $[\alpha,+\infty[$, puis par recouvrement sur $]0,+\infty[$.

III. C. 2) La convergence uniforme nous permet aussi d'appliquer le théorème d'interversion des passages à la limite (hors programme) pour calculer : $\lim_{x\to+\infty}f_a(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}a_nu_n(x)=0$.

III. D –

III. D. 1) Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\frac{1}{n+1}$. Alors $a_nv_n(x)=\frac{1}{(n+1)^{1+x}}$ et d'après la règle de Riemann la série positive $\sum a_nv_n(x)$ converge pour tout $x>0$. D'après la question III.2, la série $\sum a_nu_n(x)$ est absolument convergente pour tout $x>0$, et $a\in\mathscr{A}$.

III. D. 2) Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=1$. Alors $a_nv_n(x)=\frac{1}{(n+1)^x}$ et d'après la règle de Riemann la série positive $\sum a_nv_n(x)$ diverge pour $x\in\,]0,1[$. D'après la question III.2, la série $\sum a_nu_n(x)$ n'est donc pas convergente pour tout $x>0$, et $a\notin\mathscr{A}$.

III. E –

III. E. 1) La fonction u_n est à l'évidence strictement positive et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$; il en est donc de même de la fonction $x \mapsto \ln u_n(x) = \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k)$, qui donne en dérivant : $\dfrac{u_n'(x)}{u_n(x)} = -\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x+k}$.
Il s'agit donc de prouver la majoration : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x+k} \leqslant \ln\Big(1+\dfrac{n}{x}\Big)$, inégalité qu'on peut obtenir en sommant les inégalités : $\dfrac{1}{x+k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{\mathrm{d}t}{x+t}$ (qu'on obtient par comparaison à une intégrale).

III. E. 2) Soit $\alpha > 0$. Sur l'intervalle $[\alpha,+\infty[$ nous avons : $\|u_n'\|_\infty \leqslant \|u_n\|_\infty\Big(\dfrac{1}{\alpha} + \ln\Big(1+\dfrac{n}{\alpha}\Big)\Big) \sim \ln n \|u_n\|_\infty = (\ln n)u_n(\alpha) = \mathrm{o}\big(u_n(\beta)\big)$ avec $0 < \beta < \alpha$. Puisque $a \in \mathscr{A}$, la série $\sum a_n u_n(\beta)$ converge, ce qui prouve la convergence normale (donc uniforme) de $\sum a_n u_n'$ sur l'intervalle $[\alpha,+\infty[$.
Le théorème de dérivation terme à terme permet d'affirmer que la fonction f_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,+\infty[$, puis par recouvrement sur $]0,+\infty[$.