Étude au bord du disque de convergence (Centrale PC 2004 - extrait)

Durée : libre

Dans tout le problème, $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de complexes et $\sum a_n z^n$ la série entière associée, dont le rayon de convergence R_a est supposé non nul et fini.
On note $\mathcal{C}_a$ l'ensemble des complexes z de module R_a tels que $\sum a_n z^n$ est convergente.
On appelle cercle unité l'ensemble des complexes de module 1 : un complexe z appartient au cercle unité si et seulement s'il existe un réel x appartenant à l'intervalle $I =]-\pi, \pi]$ tel que $z = e^{ix}$.
D'autre part on note : $2\pi\mathbb{Z} = \left\{2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, et $[\![p, q]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels k vérifiant : $p \leqslant k \leqslant q$.
On étudie différentes séries entières pour lesquelles l'ensemble $\mathcal{C}_a$ prend différentes formes.
Dans le cas où $\mathcal{C}_a$ est un cercle, on propose d'observer différents comportements de la fonction somme de la série entière sur ce cercle.

I Calculs préliminaires

Les résultats de cette partie sont destinés à préparer les démonstrations des parties suivantes.

I. A – Montrer les inégalités : $\forall x \in [0, \pi],\ 0 \leqslant \sin x \leqslant x$ et $\forall x \in [0, \pi/2],\ \sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi} x$.

I. B – Montrer que pour tout x qui appartient à $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et tout entier naturel $n \geqslant 1$: $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin(x/2)\right|}$.

I. C – Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites complexes.

On note $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$.

I. C. 1) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_n V_n$.

I. C. 2) On suppose que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, et que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} |u_k - u_{k+1}|$ est convergente. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n v_n$ est convergente.

I. C. 3) On suppose que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, convergente et de limite nulle. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n v_n$ est convergente.

I. D – Déduire des questions précédentes que pour tout x qui appartient à $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, les séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\cos(kx)}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sin(kx)}{k}$ sont convergentes. Que dire pour un réel x qui appartient à $2\pi\mathbb{Z}$?

II Quelques exemples d'ensembles $\mathcal{C}_a$

On se place dans le cadre des notations de l'introduction.

II. A – Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $b_n = a_n (R_a)^n$.
Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n z^n$ est $R_b = 1$ et qu'un complexe z appartient à $\mathcal{C}_a$ si et seulement si $\dfrac{z}{R_a}$ appartient à $\mathcal{C}_b$.
On se ramène ainsi à l'étude de séries entières de rayon de convergence égal à 1.

II. B – On suppose dans cette question que $\sum |a_n|$ est convergente et que $\mathrm{R}_a = 1$.

II. B. 1) Déterminer $\mathcal{C}_a$.

II. B. 2) On note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n : \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & a_n \, \mathrm{e}^{inx} \end{pmatrix}$

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers une fonction continue sur I.

II. B. 3) Donner un exemple simple de série entière $\sum a_n z^n$ pour laquelle $\mathcal{C}_a$ est le cercle unité.

II. C – Donner un exemple simple de série entière $\sum a_n z^n$ pour laquelle $\mathrm{R}_a = 1$ et $\mathcal{C}_a$ est vide.

II. D – Construction de quelques cas intermédiaires

II. D. 1) On suppose qu'il existe un complexe z_0 de module 1 tel que $\sum a_n z_0^n$ soit semi-convergente (c'est-à-dire que $\sum a_n z_0^n$ est convergente mais ne converge pas absolument). Montrer qu'alors $\mathrm{R}_a = 1$.

II. D. 2) Soit ξ un complexe de module 1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{n\xi^n}$, montrer que $\mathcal{C}_a$ est le cercle unité privé d'un point à déterminer.

II. D. 3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et p complexes distincts $\xi_1, \ldots, \xi_p$, tous de module 1.
Construire un exemple de série entière $\sum a_n z^n$ pour laquelle $\mathcal{C}_a$ est le cercle unité privé des p points $\xi_1, \ldots, \xi_p$.

II. D. 4) On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{\cos n}{n}$.
Déterminer R_a et $\mathcal{C}_a$. La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} |a_n|$ est-elle convergente ?

III Un exemple pour lequel $\mathcal{C}_a$ est le cercle unité et $\sum |a_n|$ diverge

Dans cette partie, on définit la suite (a_n) de la façon suivante :

- $a_0 = 0$;
- pour tout naturel p non nul et tout naturel n tel que $p^2 \leqslant n < (p+1)^2$, $\quad a_n = \dfrac{(-1)^p}{p^2}$.

III. A – Montrer que la série $\sum |a_n|$ est divergente. (On pourra par exemple chercher un équivalent de $|a_n|$.)

III. B – Soit (A_n) la suite des sommes partielles de la série numérique $\sum a_n$.

III. B. 1) Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on note P le plus grand entier naturel vérifiant : $\mathrm{P}^2 \leqslant \mathrm{N}$. On pose : $\mathrm{R_N} = \mathrm{A_N} - \mathrm{A}_{\mathrm{P}^2 - 1}$. Montrer que $|\mathrm{R_N}| \leqslant \dfrac{2\mathrm{P} + 1}{\mathrm{P}^2}$.

III. B. 2) En déduire que la série $\sum a_n$ est convergente.

III. C – Soit $z = \mathrm{e}^{ix}$ un complexe de module 1, avec x non nul appartenant à I.

III. C. 1) Calculer $|a_{n+1} - a_n|$ suivant les valeurs du naturel n, et en déduire que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ est convergente.

III. C. 2) Déduire des résultats précédents et de la partie I que la série $\sum a_n z^n$ est convergente.

♦ ♦
♦