Corrigé : étude au bord du disque de convergence (Centrale PC 2004 - extrait)

I Calculs préliminaires

I. A – Pour tout $x \in [0,\pi]$ on a $\sin x \geqslant 0$. Posons $f : x \mapsto x - \sin x$ et $g : x \mapsto \sin x - \dfrac{2}{\pi}x$.
Pour tout $x \in [0,\pi]$, $f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$ donc f est croissante ; or $f(0) = 0$ donc pour tout $x \in [0,\pi]$, $f(x) \geqslant 0$, soit $\sin x \leqslant x$.
Pour tout $x \in [0,\pi]$, $g'(x) = \cos x - \dfrac{2}{\pi}$ donc g est croissante sur $[0,\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha,\pi]$, avec $\alpha = \arccos\Big(\dfrac{2}{\pi}\Big)$. Sachant que $g(0) = g(\pi) = 0$ on en déduit que pour tout $x \in [0,\pi]$, $g(x) \geqslant 0$, soit $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$.

I. B – On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \mathrm{e}^{ikx} = \mathrm{e}^{ix}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{ikx} = \mathrm{e}^{ix}\frac{\mathrm{e}^{inx}-1}{\mathrm{e}^{ix}-1} = \mathrm{e}^{ix/2}\frac{\mathrm{e}^{inx}-1}{2i\sin(x/2)}$. Or $|\mathrm{e}^{inx}-1| \leqslant 2$ donc $\displaystyle\Big|\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ikx}\Big| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}$.

I. C –

I. C. 1) On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u_1v_1 + \sum_{k=2}^{n} u_k(\mathrm{V}_k - \mathrm{V}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} u_k\mathrm{V}_k - \sum_{k=2}^{n} u_k\mathrm{V}_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} u_k\mathrm{V}_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}\mathrm{V}_k = \sum_{k=1}^{n-1}(u_k - u_{k+1})\mathrm{V}_k + u_n\mathrm{V}_n$.

I. C. 2) La suite (V_n) est bornée donc $(u_k - u_{k+1})\mathrm{V}_k = \mathrm{O}\big(|u_k - u_{k+1}|\big)$, ce qui prouve la convergence absolue de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}(u_k - u_{k+1})\mathrm{V}_k$. La suite (V_n) est bornée et la suite (u_n) converge vers 0 donc $\lim u_n\mathrm{V}_n = 0$. L'égalité précédente montre alors que la suite des sommes partielles de la série $\sum u_nv_n$ possède une limite, autrement dit que la série converge.

I. C. 3) Si la suite (u_n) converge on peut affirmer d'après le principe du télescopage que la série $\sum(u_k - u_{k+1})$ converge. Si, de plus, la suite (u_n) est décroissante alors $|u_k - u_{k+1}| = u_k - u_{k+1}$ et toutes les conditions sont réunies pour appliquer la question précédente : la série $\sum u_nv_n$ converge.

I. D – Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Posons pour $n \geqslant 1$ $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \mathrm{e}^{inx}$. La suite (u_n) décroit et tend vers 0, et la question I.B montre que la suite des sommes partielles (V_n) est bornée. On peut donc appliquer la question précédente pour en conclure que la série $\sum\dfrac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$ converge. Il en est donc de même de ses parties réelle et imaginaire $\sum\dfrac{\cos(nx)}{n}$ et $\dfrac{\sin(nx)}{n}$.
Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ on a $\dfrac{\cos(nx)}{n} = \dfrac{1}{n}$ et $\sum\dfrac{1}{n}$ diverge, et $\dfrac{\sin(nx)}{n} = 0$ et $\sum 0$ converge.

II Quelques exemples d'ensembles $\mathcal{C}_a$

II. A – Soit $\rho < \mathrm{R}_b$. La série $\sum b_n\rho^n = \sum a_n(\rho\mathrm{R}_a)^n$ converge donc $\rho\mathrm{R}_a \leqslant \mathrm{R}_a$, et $\rho \leqslant 1$. Ceci prouve que $[0,\mathrm{R}_b[\, \subset [0,1]$ soit $\mathrm{R}_b \leqslant 1$.
Soit $\rho < 1$. Alors $\rho\mathrm{R}_a < \mathrm{R}_a$ donc la série $\sum a_n(\rho\mathrm{R}_a)^n = \sum b_n\rho^n$ converge et $\rho \leqslant \mathrm{R}_b$. Ceci prouve que $[0,1[\, \subset [0,\mathrm{R}_b]$ soit $1 \leqslant \mathrm{R}_b$.

II. B –

II. B. 1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ on a $|a_nz^n| = |a_n|$ donc la série $\sum a_nz^n$ converge absolument. Ainsi, $\mathcal{C}_a$ est le cercle unité.

II. B. 2) On a $\|f_n\|_\infty = |a_n|$ donc la convergence de f_n est normale, et donc uniforme, sur I. Chacune des fonctions f_n étant continue, on en déduit que la somme de cette série de fonctions est continue sur I.

II. B. 3) Pour $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ la série $\sum|a_n|$ converge donc $\mathcal{C}_a$ est le cercle unité.

II. C – Pour $a_n = 1$ on a $\mathrm{R}_a = 1$ et $\mathcal{C}_a = \varnothing$.

II. D –

II. D. 1) La série $\sum a_nz_0^n$ converge donc $\mathrm{R}_a \geqslant |z_0| = 1$.
Si on avait $\mathrm{R}_a > 1$, z_0 serait à l'intérieur du disque ouvert de convergence et la convergence de $\sum a_nz_0^n$ serait absolue. Il n'en est rien, donc $\mathrm{R}_a = 1$.

II. D. 2) $\lim \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|z|}{|\xi|} = |z|$ donc d'après le critère de d'Alembert, $|z| < 1 \implies \sum a_n z^n$ converge absolument, et $|z| > 1 \implies \sum a_n z^n$ diverge. On en déduit que $R_a = 1$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ et $z \neq \xi$. Posons $\frac{z}{\xi} = e^{ix}$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On a $a_n z^n = \frac{e^{inx}}{n}$ donc d'après la question I.D la série $\sum a_n z^n$ converge et ainsi $z \in \mathcal{C}_a$.

En revanche si $z = \xi$ on a $a_n \xi^n = \frac{1}{n}$ donc la série $\sum a_n \xi^n$ diverge et $\xi \notin \mathcal{C}_a$. Ainsi, $\mathcal{C}_a$ est égal au cercle unité privé de ξ.

II. D. 3) Posons $a_n = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n\xi_k^n}$. Chacune des séries entières $\sum \frac{x^n}{n\xi_k^n}$ est définie sur le cercle unité privé du seul point ξ_k donc leur somme est définie sur le cercle unité privé des p points $\xi_1, \dots, \xi_p$.

II. D. 4) On a $\frac{\cos n}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n e^{in}} + \frac{1}{n e^{-in}}\right)$ donc d'après II.D.3 on a $R_a = 1$ et $\mathcal{C}_a$ est le cercle unité privé des points e^{-i} et e^{i}.
La série $\sum |a_n|$ ne peut être convergente, faute de quoi d'après II.B.1 on aurait $\mathcal{C}_a$ égal au cercle unité.

III Un exemple pour lequel $\mathcal{C}_a$ est le cercle unité et $\sum |a_n|$ diverge

III. A – On a $\sqrt{n} - 1 < p \leqslant \sqrt{n}$ donc lorsque n tend vers $+\infty$ on a $p \sim \sqrt{n}$ et ainsi $|a_n| \sim \frac{1}{n}$. La série $\sum |a_n|$ est donc divergente.

III. B –

III. B. 1) Pour tout $n \in [\![P^2, N]\!]$ on a $a_n = \frac{(-1)^P}{P^2}$ donc $R_N = (N - P^2 + 1)\frac{(-1)^P}{P^2}$. Ainsi, $|R_N| = \frac{N - P^2 + 1}{P^2}$, et puisque $N \leqslant (P+1)^2 - 1$, $|R_N| \leqslant \frac{2P+1}{P^2}$.

III. B. 2) On a $A_{P^2-1} = \sum_{n=1}^{P^2-1} a_n = \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{(-1)^p}{p^2} = \sum_{p=1}^{P-1} ((p+1)^2 - p^2)\frac{(-1)^p}{p^2} = \sum_{p=1}^{P-1} (-1)^p \frac{2p+1}{p^2} = 2\sum_{p=1}^{P-1} \frac{(-1)^p}{p} + \sum_{p=1}^{P-1} \frac{(-1)^p}{p^2}$.

Sachant que $P = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$, on a donc $A_N = 2\sum_{p=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor - 1} \frac{(-1)^p}{p} + \sum_{p=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor - 1} \frac{(-1)^p}{p^2} + R_N$ avec $|R_N| \leqslant \frac{2\lfloor \sqrt{N} \rfloor - 1}{\lfloor \sqrt{N} \rfloor^2}$.

Les deux première sommes possèdent une limite d'après le critère spécial relatif aux séries alternées et le troisième terme tend vers 0, donc la suite (A_N) des sommes partielles possède une limite, ce qui prouve que la série $\sum a_n$ converge.

III. C –

III. C. 1) $a_{n+1} - a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)^2} - \frac{(-1)^p}{p^2} & \text{s'il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que } n+1 = (p+1)^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc $|a_{n+1} - a_n| = \begin{cases} \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p^2} & \text{s'il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que } n+1 = (p+1)^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En notant P le plus grand entier naturel tel que $P^2 \leqslant N$ on en déduit que $\sum_{n=0}^{N} |a_{n+1} - a_n| = \sum_{p=1}^{P} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) \leqslant 2 \times \frac{\pi^2}{6}$.

Nous venons de prouver que la série positive $\sum |a_{n+1} - a_n|$ a ses sommes partielles majorées ; c'est donc une série convergente.

III. C. 2) Pour pouvoir appliquer la question I.C.2 il suffit que :

- la suite (a_n) tende vers 0 (la question III.A a montré que $|a_n| \sim \frac{1}{n}$) ;
- la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge (question III.C.1) ;
- la suite des sommes partielles de la série $\sum z^n$ soit bornée (question I.B).

On peut donc conclure : la série $\sum a_n z^n$ converge.

Conclusion. Nous avons montré que la série $\sum |a_n|$ diverge (III.B.2) bien que pour tout $z \in \mathcal{C}_a$ la série $\sum a_n z^n$ converge (question III.B.2 pour $z = 1$, et III.C.2 pour $z \in \mathcal{C}_a \setminus \{1\}$).