Étude d'une série de fonctions (CC INP PC 2024 – extrait)

Durée : libre

Présentation générale

On souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$;

(ii) pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$;

(iii) la fonction f' est croissante ;

(iv) la fonction f s'annule en 1, c'est-à-dire $f(1) = 0$.

Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.

Partie I – Existence de la solution du problème étudié

Dans cette partie, on construit une fonction vérifiant les conditions de (C).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad u_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right).$$

Q1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

Q2. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, puis montrer qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 1} \epsilon_n$ converge absolument et que :

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]0,+\infty[, \quad u_n'(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \epsilon_n.$$

Q3. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$.

Q4. Montrer que la fonction φ vérifie les conditions de (C).

Partie II – Unicité de la solution

Dans cette partie, on montre que φ est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C). On considère une fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C) et on pose $h = \varphi - g$.

Q5. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $h(x+1) = h(x)$ et $h'(x+1) = h'(x)$.

Q6. Soient $x \in]0,1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer successivement que :

$$\varphi'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p) \qquad \text{puis} \qquad \varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}.$$

En déduire que : $|h'(x+p) - h'(p)| \leqslant \dfrac{1}{p}$.

Q7. Déduire des deux questions précédentes que la fonction h' est constante sur $]0,+\infty[$.

Q8. Conclure que $\varphi = g$.

Partie III – La formule de duplication

Dans cette partie, on considère la fonction $\psi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \psi(x) = (x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

Q9. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a la relation :

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}\frac{(2^N N!)^2}{(2N)!}.$$

Q10. Déduire de la question précédente et de la formule de Stirling que $\psi(1) = 0$.

Q11. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$(x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi).$$