Corrigé : étude d'une file d'attente (CC INP PSI 2024 – extrait)

Partie I – Temps d'arrivée du n-ième client

Q1. $T_1 = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, X_k = 1\right\}$ donc $[T_1 = k] = [X_k = 1] \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} [X_i = 0]$. Par indépendance de la famille de (X_n) on en déduit que $\mathbb{P}(T_1 = k) = \mathbb{P}(X_k = 1) \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_i = 0) = p(1-p)^{k-1}$. On reconnaît une loi géométrique donc $\mathbb{E}(T_1) = \dfrac{1}{p}$.

Q2. Soit $\omega \in \Omega$. Alors $\omega \in A \iff \forall k \geqslant 1,\ X_k(\omega) = 0$ soit encore : $\omega \in A \iff \forall k \geqslant 1,\ \omega \notin [T_1 = k]$.
On a donc $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \overline{[T_1 = k]} = \Omega \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} [T_1 = k]$.

Les événements $[T_1 = k]$ sont deux à deux incompatibles donc $\mathbb{P}(A) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_1 = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = 1 - \dfrac{p}{1-(1-p)} = 0$.
Il est quasi-certain qu'un nouveau client va arriver.

Q3. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(D_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(T_k) = \dfrac{n}{p}$.

Q4. Posons $S_k = \sum_{i=1}^{k-1} X_i$ (S_k représente le nombre de clients qui sont arrivés avant la date k). Par indépendance des (X_i) la variable S_k suit une loi binomiale de paramètre $(k-1, p)$.

On a $D_n = k \iff X_n = 1$ et $S_k = n-1$ et d'après le lemme des coalitions, X_n et S_k sont indépendants donc $\mathbb{P}(D_n = k) = \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}(S_k = n-1) = p\mathbb{P}(S_k = n-1)$. Ainsi,

- si $k < n$ on a $\mathbb{P}(S_k = n-1) = 0$ donc $\mathbb{P}(D_n = k) = 0$;
- si $k > n$, $\mathbb{P}(S_k = n-1) = \dbinom{k-1}{n-1} p^{n-1}(1-p)^{k-n}$ donc $\mathbb{P}(D_n = k) = \dbinom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n}$.

Partie II – Étude du comportement de la file

II.1 - Une suite récurrente

Q5. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $z_n \in]0,1[$:

- si $n = 1$, c'est vrai par hypothèse ;
- si $n > 1$, supposons $z_{n-1} \in]0,1[$. Alors $a(x-1) < 0$ donc $z_n = \exp(a(x-1)) \in]0,1[$; la récurrence se propage.

De plus, $z_{n+1} - z_n = e^{a(z_n - 1)} - e^{a(z_{n-1}-1)} = e^{a(z_{n-1}-1)}\left(e^{a(z_n - z_{n-1})} - 1\right)$.
$e^{a(z_n - z_{n-1})} - 1$ est du signe de $z_n - z_{n-1}$ donc $z_{n+1} - z_n$ est du signe de $z_n - z_{n-1}$. Par récurrence on en déduit que $z_{n-1} - z_n$ est du signe de $z_2 - z_1$.

Q6. Si $z_2 - z_1 > 0$, la suite (z_n) est donc croissante et majorée par 1 ; si $z_2 - z_1 = 0$, la suite (z_n) est constante ; Si $z_2 - z_1 < 0$, la suite (z_n) est décroissante et minorée par 0. Dans tous les cas la suite (z_n) converge vers une limite $\ell \in [0,1]$, et par continuité de f, $f(\ell) = \ell$.

Q7. Pour tout $x \in]0,1]$, $\psi(x) \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant a(x-1) \iff x \geqslant e^{a(x-1)} = f(x)$ et de même, $\psi(x) = 0 \iff x = f(x)$.

Q8. Pour tout $x \in]0,1[$, $\psi'(x) = \dfrac{1}{x} - a$ donc si $a \leqslant 1$ on a pour tout $x \in]0,1[$, $\psi'(x) \geqslant 0$. La fonction ψ est donc strictement croissante sur $]0,1]$. Or $\psi(1) = 0$ donc pour tout $x \in]0,1[$, $\psi(x) < 0$.
D'après la question précédente, on a donc pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) > x$, ce qui prouve que la suite (z_n) est croissante (strictement), et $f(\ell) = \ell \iff \psi(\ell) = 0 \iff \ell = 1$ donc (z_n) converge vers 1.

Q9. Dressons le tableau des variations de ψ :

x	0		$\frac{1}{a}$		1
$\psi'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$\psi(x)$	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	>0	$\searrow$	0

On a $\dfrac{1}{a} < 1$ donc $\psi\Big(\dfrac{1}{a}\Big) > 0$; il existe donc $\alpha \in \Big]0, \dfrac{1}{a}\Big[$ tel que $\psi(\alpha) = 0$.

Ainsi, $f(\ell) = \ell \iff \ell = \alpha$ ou $\ell = 1$.

- si $z_1 \in]0,\alpha]$ on a $f\big(]0,\alpha]\big) \subset]0,\alpha]$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in]0,\alpha]$ et nécessairement $\ell = \alpha$;
- si $z_1 \in]\alpha, 1[$ on a de même pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in]\alpha, 1[$. Mais pour tout $x \in]\alpha, 1[$, $f(x) < x$ donc $z_{n+1} < z_n$. La suite (z_n) est décroissante donc nécessairement $\ell = \alpha$.

Dans tous les cas, la suite (z_n) converge vers α.

II.2 - Groupes de clients

Q10. L'événement Z peut être décrit par la phrase : « il existe un groupe de client qui a été servi sans l'arrivée de nouveaux clients ».

Q11. On a $\mathrm{N}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$ donc N_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Q12. Si $n = 0$ on a $\mathbb{P}\big(\mathrm{V}_1 = k \mid \mathrm{S} = 0\big) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$; si $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}\big(\mathrm{V}_1 = k \mid \mathrm{S} = n\big) = \mathbb{P}(\mathrm{N}_n = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$\mathbb{P}(\mathrm{V}_1 = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\mathrm{V}_1 = k \mid \mathrm{S} = n\big)\mathbb{P}(\mathrm{S} = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\big(\lambda(1-p)\big)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda p}$$

et on constate que V_1 suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda p)$.

Q13. On a $\mathrm{V}_n = 0 \implies \mathrm{V}_{n+1} = 0$ soit encore $[\mathrm{V}_n = 0] \subset [\mathrm{V}_{n+1} = 0]$. La suite d'événements $[\mathrm{V}_n = 0]$ est croissante au sens de l'inclusion, et d'après le théorème de la limite monotone, la suite $\big(\mathbb{P}(\mathrm{V}_n = 0)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, avec $\lim \mathbb{P}(\mathrm{V}_n = 0) = \mathbb{P}\Big(\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\mathrm{V}_n = 0]\Big)$, soit $\lim z_n = \mathbb{P}(\mathrm{Z})$.

Q14. Voici une question un peu difficile pour le concours CC INP. Raisonnons par récurrence sur j :

- si $j = 0$, la condition $\mathrm{V}_1 = 0$ impose pour tout $n \geqslant 2$, $\mathrm{V}_n = 0$ donc $\mathbb{P}\big(\mathrm{V}_{n+1} = 0 \mid \mathrm{V}_1 = 0\big) = 1$ et $\mathbb{P}(\mathrm{V}_n = 0) = 1$;
- si $j \geqslant 1$, la condition $\mathrm{V}_1 = j$ indique qu'il y a j clients dans le premier groupe. Considérons l'un d'entre eux. Durant son service, un nombre V_2' de nouveaux clients arrive ; durant le service des $j-1$ autres membres du premier groupe, un nombre V_2'' de nouveaux clients arrive, de sorte que $\mathrm{V}_2 = \mathrm{V}_2' + \mathrm{V}_2''$.
  On note ensuite pour tout $n \geqslant 2$ V_{n+1}' et V_{n+1}'' les clients arrivant durant le service des clients des groupes V_n' et V_n'' respectivement, de sorte d'avoir toujours $\mathrm{V}_n = \mathrm{V}_n' + \mathrm{V}_n''$.
  Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$,

  $$\mathbb{P}\big(\mathrm{V}_{n+1} = 0 \mid \mathrm{V}_1 = j\big) = \mathbb{P}\big([\mathrm{V}_{n+1}' = 0] \cap [\mathrm{V}_{n+1}'' = 0] \mid \mathrm{V}_1 = j\big) = \mathbb{P}\big(\mathrm{V}_{n+1}' = 0 \mid \mathrm{V}_1' = 1\big)\mathbb{P}\big(\mathrm{V}_{n+1}'' = 0 \mid \mathrm{V}_1'' = j-1\big)$$

  par indépendance.
  On a $\mathbb{P}\big(\mathrm{V}_{n+1}' = 0 \mid \mathrm{V}_1' = 1\big) = \mathbb{P}(\mathrm{V}_n = 0)$ et par hypothèse de récurrence, $\mathbb{P}\big(\mathrm{V}_{n+1}'' = 0 \mid \mathrm{V}_1'' = j-1\big) = \mathbb{P}(\mathrm{V}_n = 0)^{j-1}$ donc $\mathbb{P}\big(\mathrm{V}_{n+1} = 0 \mid \mathrm{V}_1 = j\big) = \mathbb{P}(\mathrm{V}_n = 0)^j$: la récurrence se propage.

Q15. On a $z_{n+1} = \mathbb{P}(V_{n+1} = 0) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(V_{n+1} = 0 \mid V_1 = j\big)\mathbb{P}(V_1 = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} z_n^j \times \frac{(\lambda p)^j}{j!}\,\mathrm{e}^{-\lambda p} = \mathrm{e}^{-\lambda p} \times \exp(\lambda p z_n = \exp(\lambda p(z_n - 1))$.

Q16. D'après la partie II.1 deux cas de figure se présentent :

- si $\lambda p \leqslant 1$ alors $\lim z_n = 1$. Ainsi, $\mathbb{P}(Z) = 1$ et il est presque sûr que le processus se termine faute de clients ;
- si $\lambda p > 1$, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $\lim z_n = \alpha$. Ainsi, $\mathbb{P}(Z) = \alpha$ et α est la probabilité que le processus se termine faute de client.

Sachant que $0 < \alpha < \frac{1}{\lambda p}$, cette probabilité tend vers 0 lorsque λp croît. C'est intuitif, sachant que $\lambda = \mathbb{E}(S)$ représente le temps moyen de la durée de service d'un client : plus le temps de service est long, plus la file d'attente s'allonge ...