Les matrices de Kac (CCINP PSI 2020 – extrait)

Durée : libre

Notations

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.
- Dans tout ce problème, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ seront notés en colonne.
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$. On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !

Objectifs

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés spectrales de deux matrices $A_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ introduites par Mark Kac au milieu du XXe siècle. Ces liens ont été mis en évidence par Alan Edelman et Éric Kostlan au début des années 2 000.

Ce problème est divisé en trois parties largement indépendantes. La Partie I introduit les matrices de Kac en taille 3 et met en évidence les propriétés qui seront démontrées en taille quelconque dans les Parties II et III.

Partie I – La dimension 3

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q1. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(XI_3 - A)$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Q2. En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de* A *dans cette question.*

Q3. Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$. Vérifier que $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$.

Q4. La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de* B *dans cette question.*

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

Q5. Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B.

Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q6. Calculer $\Delta^{-1}A\Delta$. En déduire à nouveau que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Partie II – Étude d'un endomorphisme

Objectifs

Dans cette partie, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^k(x)\sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$\mathrm{V}_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\Big(f_0, f_1, \dots, f_n\Big) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \;\middle|\; (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

Q7. Montrer que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.

Q8. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $f'_k \in \mathrm{V}_n$. En déduire que :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_n : & \mathrm{V}_n & \to & \mathrm{V}_n \\ & f & \mapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est la matrice :

$$\mathrm{B}_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$.

Q9. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = (\cos(x) + i\sin(x))^k(\cos(x) - i\sin(x))^{n-k}$.

Q10. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $g_k \in \mathrm{V}_n$.

Q11. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer g'_k. En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.

Q12. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

Q13. Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ et en déduire que :

$$\mathrm{Ker}\Big(\mathrm{B}_n - in\mathrm{I}_{n+1}\Big) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k}\dbinom{n}{k}$.

Partie III – Les matrices de Kac de taille $n+1$

Objectifs

Dans cette partie, on introduit la matrice A_n. On utilise les résultats de la Partie II pour étudier les propriétés spectrales de la matrice A_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note A_n la matrice tridiagonale suivante :

$$\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général a_{kl} de la matrice A_n vérifie donc :

- $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$;
- $a_{k,k-1} = n-k+2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$;
- $a_{kl} = 0$ pour tous les couples $(k,l) \in [\![1, n+1]\!]^2$ non couverts par les formules précédentes.

On note enfin $\mathrm{D}_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont le k^{e} terme diagonal d_{kk} vérifie $d_{kk} = i^{k-1}$.

Q14. Soient $\mathrm{M} = (m_{kl})_{1\leqslant k,l\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice de taille p et $\mathrm{D} = (d_{kl})_{1\leqslant k,l\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de taille p. Exprimer le terme général de la matrice DM en fonction des m_{kl} et des d_{kl}, puis exprimer le terme général de la matrice MD en fonction des m_{kl} et des d_{kl}.

Q15. Montrer que $\mathrm{D}_n^{-1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n = -i\mathrm{B}_n$ où B_n est la matrice déterminée dans la Partie II. En déduire une relation simple entre $\chi_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{X})$ et $\chi_{\mathrm{B}_n}(i\mathrm{X})$, où χ_{A_n} et χ_{B_n} sont les polynômes caractéristiques respectifs de A_n et B_n.

Q16. En déduire, à l'aide de la Partie II, que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que les valeurs propres de A_n sont les entiers de la forme $2k-n$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et que :

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{A}_n - n\mathrm{I}_{n+1}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $p_k = \binom{n}{k}$.