Corrigé : les matrices de Kac (CCINP PSI 2020 – extrait)

Partie I – La dimension 3

Q1. On calcule $\chi_A = X(X-2)(X-4)$.

Q2. Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable. $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 0, 2\}$ et les trois sous-espaces propres sont de dimension 1 car les racines de χ_A sont simples.

Q3. On calcule $\chi_B = X(X-2i)(X+2i)$ et $i\chi_B(iX) = i^4 X(X-2)(X+2) = \chi_A(X)$.

Q4. B ne possède qu'une valeur propre réelle ; celle-ci est simple donc le sous-espace propres associé est de dimension 1 donc B n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Elle est en revanche diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ puisque χ_B est scindé à racines simples dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Q5. Un calcul direct permet d'obtenir $D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = -iB$.

Q6. Là encore, un calcul direct donne $\Delta^{-1}A\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est symétrique réelle donc diagonalisable (théorème spectral). Ainsi, A est semblable à une matrice diagonalisable donc est elle-même diagonalisable.

Partie II – Étude d'un endomorphisme

Q7. Considérons des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$, supposons que l'un d'entre eux au moins soit non nul et notons alors j l'indice du plus grand des λ_k non nuls.

On a pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{j} \lambda_k \cos^k(x)\sin^{n-k}(x) = 0$ et en divisant par $\sin^{n-j}(x)$: $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{j} \lambda_k \cos^k(x)\sin^{j-k}(x) = 0$,

soit encore : $\sin(x)\displaystyle\sum_{k=0}^{j-1} \lambda_k \cos^k(x)\sin^{j-1-k}(x) + \lambda_j \cos^j(x) = 0$.

En faisant alors tendre x vers 0 on obtient $\lambda_j = 0$, ce qui est absurde. La famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre et constitue donc une base de V_n et $\dim V_{nN} = n+1$.

Q8. On calcule : $\forall x \in \mathbb{R}$,

- $f_0'(x) = n\cos(x)\sin^{n-1}(x) = nf_1(x)$;
- si $k \in [\![1, n-1]\!]$, $f_k'(x) = -k\cos^{k-1}(x)\sin n-k+1(x) + (n-k)\cos^{k+1}(x)\sin n-k-1(x) = -kf_{k-1}(x) + (n-k)f_{k+1}(x)$;
- $f_n'(x) = -n\sin(x)\cos^{n-1}(x) = -nf_{n-1}(x)$

donc dans tous les cas, $f_k' \in V_n$.

Par linéarité on en déduit que pour tout $f \in V_n$, $f' = \varphi_n(f) \in V_n$, et puisque l'opérateur de dérivation est linéaire, on en déduit que φ_n est un endomorphisme de V_n. Les calculs précédents montrent en outre que la matrice associée à φ_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ est la matrice B_n de l'énoncé.

Q9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = e^{ikx}e^{i(k-n)x} = (e^{ix})^k(e^{-ix})^{n-k} = \big(\cos x + i\sin x\big)^k\big(\cos x - i\sin x\big)^{n-k}$.

Q10. D'après la formule du binôme on en déduit que $g_k(x) = \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\cos x)^j (i \sin x)^{k-j}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} (\cos x)^\ell (-i \sin x)^{n-k-\ell}\right)$

soit encore $g_k(x) = \sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{k}{j}\binom{n-k}{\ell} (-1)^{n-k-\ell} i^{n-j-\ell} \cos^{j+\ell}(x) \sin^{n-j-\ell}(x) = \sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{k}{j}\binom{n-k}{\ell} (-1)^{n-k-\ell} i^{n-j-\ell} f_{j+\ell}(x)$.
Pour tout $j \in [\![0,k]\!]$ et $\ell \in [\![0,n-k]\!]$ on a $j+\ell \in [\![0,n]\!]$ donc $f_{j+\ell} \in \mathrm{V}_n$ et par linéarité, $g_k \in \mathrm{V}_n$.

Q11. On a immédiatement $g_k' = i(2k-n)g_k$ donc g_k est vecteur propre de φ_n pour la valeur propre $\lambda_k = i(2k-n)$.
On a mis en évidence $n+1$ valeurs propres distinctes donc l'endomorphisme φ_n est diagonalisable avec $n+1$ valeurs propres nécessairement simples ; $\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \left\{ i(2k-n) \,\middle|\, k \in [\![0,n]\!] \right\}$ et $\mathrm{Ker}(\varphi_n - \lambda_k \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(g_k)$.

Q12. φ_n est un automorphisme de V_n lorsque 0 n'est pas valeur propre de φ_n, autrement dit lorsque n est un entier impair (il n'existe pas de $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $n = 2k$).

Q13. On a calculé à la question 10 : $g_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} i^{n-j} f_j(x)$. Le vecteur g_n engendre le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_n = in$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi_n - in\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(g_n)$ avec $g_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} i^{n-j} f_j$, ce qui se traduit matriciellement par $\mathrm{Ker}\big(\mathrm{B}_n - in\mathrm{I}_{n+1}\big) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$.

Partie III – Les matrices de Kac de taille $n+1$

Q14. Le terme de rang (k,ℓ) de la matrice DM vaut $\sum_{j=1}^{p} d_{kj} m_{j\ell} = d_{kk} m_{k\ell}$ puisque D est diagonale.

De même, le terme de rang (k,ℓ) de la matrice MD vaut $\sum_{j=1}^{p} m_{kj} d_{j\ell} = m_{k\ell} d_{\ell\ell}$.

Q15. On en déduit que le terme de rang (k,ℓ) de la matrice $\mathrm{D}_n^{-1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$ vaut $d_{kk}^{-1} a_{k,\ell} d_{\ell\ell} = i^{1-k} a_{k\ell} i^{\ell-1} = i^{\ell-k} a_{k\ell}$.
Ce terme vaut :

- ik si $\ell = k+1$;
- $-i(n-k+2)$ si $\ell = k-1$;
- 0 dans les autres cas.

On reconnait les termes de la matrice $-i\mathrm{B}_n$, donc $\mathrm{D}_n^{-1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n = -i\mathrm{B}_n$.
Les matrices A_n et $-i\mathrm{B}_n$ sont semblables et ont donc même polynôme caractéristique :

$$\chi_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{X}) = \chi_{-i\mathrm{B}_n}(\mathrm{X}) = \det\big(\mathrm{X}\mathrm{I}_{n+1} + i\mathrm{B}_n\big) = (-i)^{n+1} \det\big(i\mathrm{X}\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{B}_n\big) = (-i)^{n+1} \chi_{\mathrm{B}_n}(i\mathrm{X})$$

Q16. La partie II a montré que $\chi_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{X}) = \prod_{k=0}^{n} (\mathrm{X} - \lambda_k)$ avec $\lambda_k = i(2k-n)$ donc $\chi_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{X}) = (-i)^{n+1} \prod_{k=0}^{n} (i\mathrm{X} - \lambda_k) = \prod_{k=0}^{n} (\mathrm{X} + i\lambda_k)$,

soit $\chi_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{X}) = \prod_{k=0}^{n} \big(\mathrm{X} - (n-2k)\big)$. Ce polynôme est scindé à racines simples donc A_n est diagonalisable, avec

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_n) = \left\{ n-2k \,\middle|\, k \in [\![0,n]\!] \right\} = \left\{ 2k'-n \,\middle|\, k' \in [\![0,n]\!] \right\} \qquad \text{(avec le changement d'indice } k' = n-k\text{).}$$

Enfin, on a $\mathrm{B}_n q = inq$ avec $q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ (question 13) donc $\mathrm{D}_n^{-1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n q = nq$, soit $\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n q = n\mathrm{D}_n q$.

On calcule $\mathrm{D}_n q = \begin{pmatrix} q_0' \\ q_1' \\ \vdots \\ q_n' \end{pmatrix}$ avec $q_k' = i^{k-1} q_k = i^{n-1} \binom{n}{k}$ donc $\mathrm{D}_n q = i^{n-1} p$ avec $p = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$. Ainsi, p est un vecteur propre réel de A_n pour la valeur propre n, et ainsi $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}_n - n\mathrm{I}_{n+1}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\, p$.