

CRITÈRE DE SYLVESTER (CCINP MP 2024 – EXTRAIT)

Durée : libre

Le but de ce problème est de démontrer et utiliser plusieurs critères pour prouver qu'une matrice symétrique réelle est définie positive. On rappelle que, pour un entier naturel non nul n , une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si et seulement si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T M X > 0$$

Q1. Démontrer, en utilisant directement la définition précédente, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive.

Partie I – Caractérisation spectrale

Q2. Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle pour que celle-ci soit définie positive.

Q3. Application. Démontrer que le polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$ admet trois racines réelles distinctes (on ne cherchera pas à les déterminer).

Démontrer alors que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est définie positive grâce à la caractérisation spectrale.

Partie II – Un critère en dimension 2

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si sa trace et son déterminant sont strictement positifs.

Q4. Démontrer qu'une matrice définie positive M de taille quelconque vérifie toujours $\text{tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.

Q5. Démontrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.

Q6. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai pour les matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Q7. Application pour 5/2 uniquement. Utiliser le résultat précédent afin de démontrer que $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$ admet un extremum local. Préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local.

Partie III – Le critère de Sylvester

Dans cette partie, on étudie le critère de Sylvester, valable en toute dimension.

Pour une matrice carrée quelconque $M = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit le k -ième mineur principal comme étant le déterminant de la matrice $M_k = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, k \rrbracket} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. On précise qu'une matrice carrée de taille n possède n mineurs principaux.

Par exemple, les trois mineurs principaux de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ de la question 3 sont les déterminants des matrices

$$B_1 = (1), B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B_3 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On dit qu'une matrice vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs. On souhaite alors démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.

Par exemple, pour la matrice B de la question 3, on constate que :

$$\det(B_1) = 1 > 0, \quad \det(B_2) = 2 > 0 \quad \text{et} \quad \det(B_3) = 3 > 0.$$

La matrice B vérifie le critère de Sylvester, elle est donc définie positive.

Q8. On fixe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ainsi qu'un vecteur colonne $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$. Déterminer un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tel que

$$X_k^\top M_k X_k = X^\top M X$$

Q9. Démontrer que toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.

Dans les deux questions suivantes, il s'agit de démontrer la réciproque, c'est-à-dire que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive. Pour cela, on va raisonner par récurrence sur la taille n de la matrice.

Q10. Soit $n \geq 2$ et soit une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) > 0$. On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & U \\ \hline U^\top & \alpha \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad M_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

On suppose que la matrice M_{n-1} est définie positive.

Justifier l'existence d'un vecteur colonne $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_{n-1}V + U = 0$.

En notant $Q = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & V \\ \hline O_{1,n-1} & 1 \end{array} \right)$, démontrer alors que $Q^\top M Q$ s'écrit par blocs $\left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & O_{n-1,1} \\ \hline O_{1,n-1} & \beta \end{array} \right)$ avec $\beta > 0$.

Q11. Démontrer par récurrence que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

Q12. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la matrice $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ?

Q13. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ? Justifier.

Q14. Démontrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0$$

Q15. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice $S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle définie positive ?