Corrigé : critère de Sylvester (CCINP MP 2024 – extrait)

Q1. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors $X^\top AX = 2x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + (x+y)^2 \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$ et $x + y = 0$ soit $x = y = 0$, donc pour $X \neq 0$ on a bien $X^\top AX > 0$: la matrice symétrique A est définie positive.

Partie I – Caractérisation spectrale

Q2. On démontre que A est définie positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

- Si A est définie positive, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Alors $X^\top AX > 0$. Mais $X^\top AX = \lambda X^\top X = \lambda\|X\|^2$ et puisque $\|X\|^2 > 0$ on en déduit $\lambda > 0$.
- Réciproquement, supposons $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème spectral, A est ortho-diagonalisable : il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que $A = PDP^\top$. Alors pour tout $X \neq 0$, $X^\top AX = (P^\top X)^\top D(P^\top X) = Y^\top DY$ avec $Y = P^\top X \neq 0$. Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors $X^\top AX = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k y_k^2 = 0$ soit $y_1 = \cdots = y_n = 0$ puisque $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. Puisque $Y \neq 0$ on a donc bien $X^\top AX > 0$: A est définie positive.

Q3. Dressons le tableau des variations de la fonction polynomiale associée à P :

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$P(x)$	$-\infty$	-3	1	-5	$+\infty$

On constate que P possède trois racines réelles, respectivement localisées dans $]0, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$ donc toutes trois strictement positives.
Or il se trouve qu'un calcul donne $\chi_B = P$ (quel hasard !) donc d'après la caractérisation spectrale la matrice symétrique B est définie positive.

Partie II – Un critère en dimension 2

Q4. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (comptées avec multiplicité) de M. M étant diagonalisable, $\mathrm{tr}\,M = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $\det M = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ et puisque $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, par caractérisation spectrale on a $\mathrm{tr}\,M > 0$ et $\det M > 0$.

Q5. M est symétrique réelle donc diagonalisable. Notons $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ (avec éventuellement $\lambda_1 = \lambda_2$). On a $\lambda_1\lambda_2 = \det(M) > 0$ donc λ_1 et λ_2 sont non nulles et de même signe, et $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(M) > 0$ donc ce signe est positif. Par caractérisation spectrale M est définie positive.

Q6. Ce résultat est mis en défaut en dimension 3 ; il suffit de considérer la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ pour s'en convaincre : $\det(M) = 3 > 0$ et $\mathrm{tr}(M) = 3 > 0$ mais $\mathrm{Sp}(M) = \{3, -1, -1\}$ donc M n'est pas définie positive.

Q7. On résout $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2 y} = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{xy^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 y = 1 \\ xy^2 = 1 \end{cases} \iff x = y = 1$. Seul le point $(1, 1)$ est susceptible d'abriter un extremum local.

On calcule ensuite $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2}{x^3 y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x^2 y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{2}{x y^3}$ donc la matrice hessienne de f en $(1,1)$ vaut $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a $\det(\mathrm{M}) = 3 > 0$ et $\operatorname{tr}(\mathrm{M}) = 4 > 0$ donc la matrice M est définie positive, en conséquence de quoi f présente au point $(1,1)$ un minimum local.

Partie III – Le critère de Sylvester

Q8. Complétons X_k par des 0, autrement dit posons $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $x_i = 0$ pour $i > k$. Alors :

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} m_{i,j} x_i x_j = \mathrm{X}_k^\top \mathrm{M}_k \mathrm{X}_k$$

Q9. Considérons $\mathrm{X}_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ainsi que la matrice $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie à la question précédente. On a $\mathrm{X} \neq 0$ et M est définie positive donc $\mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X} > 0$, et donc aussi $\mathrm{X}_k^\top \mathrm{M} \mathrm{X}_k > 0$. Ceci prouve que la matrice symétrique M_k est définie positive et par suite (question 4) que $\det(\mathrm{M}_k) > 0$. La matrice M vérifie donc le critère de Sylvester.

Q10. Une matrice définie positive M est inversible (puisque $0 \notin \operatorname{Sp}(\mathrm{M})$) donc on peut poser $\mathrm{V} = -\mathrm{M}_{n-1}^{-1} \mathrm{U}$.
Un calcul par blocs donne alors $\mathrm{Q}^\top \mathrm{M} \mathrm{Q} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{M}_{n-1} & \mathrm{O}_{n-1,1} \\ \hline \mathrm{V}^\top \mathrm{M} + \mathrm{U}^\top & \mathrm{U}^\top \mathrm{V} + \alpha \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{M}_{n-1} & \mathrm{O}_{n-1,1} \\ \hline \mathrm{O}_{1,n-1} & \mathrm{U}^\top \mathrm{V} + \alpha \end{array}\right)$ car $\mathrm{M}_{n-1} \mathrm{V} + \mathrm{U} = 0$ implique en transposant : $\mathrm{V}^\top \mathrm{M}_{n-1}^\top + \mathrm{U}^\top = 0$, soit $\mathrm{V}^\top \mathrm{M}_{n-1} + \mathrm{U}^\top = 0$ puisque M_{n-1} est symétrique.

Q11. Montrons par récurrence sur n qu'une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester est définie positive :

- si $n = 1$ on a $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha > 0$ donc est définie positive ;
- si $n > 1$, supposons le résultat acquis au rang $n - 1$.
  Soit donc $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester. La matrice M_{n-1} vérifie elle-même ce critère, et est donc définie positive par hypothèse de récurrence.
  En reprenant les notations de la question précédente, on a $\det \mathrm{Q} = \det \mathrm{Q}^\top = 1$ donc $\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{M}_{n-1}) \times (\mathrm{U}^\top \mathrm{V} + \alpha)$, et puisque $\det(\mathrm{M}) > 0$ et $\det(\mathrm{M}_{n-1}) > 0$ on en déduit que $\beta = \mathrm{U}^\mathrm{T} \mathrm{V} + \alpha > 0$.
  Considérons alors $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$; il s'agit de prouver que $\mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X} > 0$. Pour exploiter la question précédente on pose $\mathrm{Y} = \mathrm{Q}^{-1} \mathrm{X}$ de sorte que $\mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X} = \mathrm{Y}^\top \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{M}_{n-1} & \mathrm{O}_{n-1,1} \\ \hline \mathrm{O}_{1,n-1} & \beta \end{array}\right) \mathrm{Y}$
  Posons alors $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} \mathrm{Y}_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{Y}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$. On calcule (par blocs) $\mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X} = \mathrm{Y}_{n-1}^\top \mathrm{M}_{n-1} \mathrm{Y}_{n-1} + \beta y_n^2$.
  Puisque M_{n-1} est définie positive et qu'on a justifié que $\beta > 0$, on peut affirmer que $\mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X} \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $\mathrm{Y}_{n-1} = 0$ et $y_n = 0$ soit $\mathrm{X} = 0$, ce qui montre que M est définie positive : la récurrence se propage.

Q12. $\mathrm{C}(x)$ est symétrique réelle et ses trois mineurs principaux valent 2, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ et $\det \mathrm{C}(x) = 1 - 2x^2$ donc d'après le critère de Sylvester, $\mathrm{C}(x)$ est définie positive si et seulement si $x^2 < \dfrac{1}{2}$, soit $x \in \left]-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

Q13. Le calcul des mineurs principaux montre que le troisième n'est pas strictement positif : $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \leqslant 0$ donc d'après le critère de Sylvester cette matrice n'est pas définie positive.

Q14. On a $4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz = \mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X}$ avec $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice symétrique M vérifie le critère de sylvester donc est définie positive et ainsi $\mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X} > 0$.

Q15. Posons $u_n = \det S_n$. On a $u_1 = \sqrt{3}$, $u_2 = 2$ et pour tout $n \geqslant 3$, $u_n = \sqrt{3}u_{n-1} - u_{n-2}$ (calcul classique d'un déterminant tri-diagonal).
L'équation caractéristique $r^2 - \sqrt{3}r + 1 = 0$ de cette relation de récurrence linéaire possède deux racines complexes distinctes $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i = \exp\left(\pm i\frac{\pi}{6}\right)$ donc il existe deux constantes réelles A et B telles que $u_n = \mathrm{A}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \mathrm{B}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ et les conditions initiales donnent $\mathrm{A} = 1$ et $\mathrm{B} = \sqrt{3}$ donc pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$.
Ceci nous permet de calculer les premiers mineurs de la matrice S_n : $u_1 = \sqrt{3} > 0$, $u_2 = 2 > 0$, $u_3 = \sqrt{3} > 0$, $u_4 = 1 > 0$ et $u_5 = 0$. Ainsi, d'après le critère de Sylvester, la matrice S_n n'est définie positive que pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.