Comparaison de fonctions développables en série entière (banque PT 1999 - extrait)

Durée : libre

Le but de ce problème est l'étude de séries entières à termes positifs sur le bord de l'intervalle de convergence. Toutes les séries entières considérées ici s'annulent en 0 (et sont donc indexées par $\mathbb{N}^*$). Une série de terme général a_n sera notée $\sum a_n$ tandis que sa somme (lorsque la série converge) sera notée $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Partie I.

Question 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels vérifiant les conditions :

$$(\mathrm{H})\begin{cases}(\mathrm{H}_1)\ a_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*\,;\\ (\mathrm{H}_2) \text{ la série entière } \sum a_n x^n \text{ a pour rayon de convergence } 1\,;\\ (\mathrm{H}_3) \text{ la série } \sum a_n \text{ est divergente.}\end{cases}$$

On désigne par f la somme de la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-1,1[$.

a) Soit $\mathrm{A} > 0$. Montrer qu'il existe $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}_1} a_n \geqslant 2\mathrm{A}$.

b) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $0 \leqslant 1 - x \leqslant \alpha$ entraîne $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}_1} a_n x^n \geqslant \mathrm{A}$.

c) En déduire que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$.

Question 2. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lambda \in \mathbb{R}$.

a) On suppose $\lambda \neq 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$? Que peut-on dire de ce rayon de convergence lorsque $\lambda = 0$?

b) Soit g la somme de la série entière $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ pour $x \in]-1,1[$. On pose $\lambda_n = \frac{b_n}{a_n}$. Montrer que :

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{g(x)}{f(x)} - \lambda = \frac{1}{f(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_n - \lambda) a_n x^n.$$

c) Montrer qu'il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que $|\lambda_n - \lambda| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\mathrm{N}_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}_2$, $|\lambda_n - \lambda| \leqslant \epsilon$. En déduire que pour $x \in]0,1[$,

$$\sum_{n=\mathrm{N}_2+1}^{+\infty} |\lambda_n - \lambda| a_n x^n \leqslant \epsilon f(x).$$

e) Montrer que, pour $x \in]0,1[$, $\left|\frac{g(x)}{f(x)} - \lambda\right| \leqslant \epsilon + \frac{\mathrm{M}}{f(x)} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}_2} a_n x^n$, et en déduire que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{g(x)}{f(x)} = \lambda$.

Partie II.

Question 3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels vérifiant les conditions :

$$(\mathrm{H}')\begin{cases}(\mathrm{H}'_1)\ a_1>0 \text{ et } a_n\geqslant 0 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}^*\,;\\ (\mathrm{H}'_2)\ \text{la série entière } \sum a_n x^n \text{ a pour rayon de convergence } 1\,;\\ (\mathrm{H}'_3)\ \text{la série } \sum a_n \text{ est divergente.}\end{cases}$$

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{A}_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$.

a) Montrer que la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie les conditions (H_1) et (H_3) de la partie I.

b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{A}_n x^n$ est au plus égal à 1.

c) Soit $r\in\,]0,1[$. En remarquant que $r^k\geqslant r^n$ pour $1\leqslant k\leqslant n$, montrer que la suite $(\mathrm{A}_n r^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.
En déduire que (A_n) vérifie toutes les conditions (H) de la partie II.

d) Montrer que, pour tout $x\in\,]-1,1[$, $(1-x)\sum_{k=1}^{n}\mathrm{A}_k x^k=\sum_{k=1}^{n}a_k x^k-\mathrm{A}_n x^{n+1}$.

En déduire une relation entre $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{A}_n x^n$.

Question 4. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Posons $\mathrm{C}_n=\sum_{k=1}^{n}c_k$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{C}_n}{\mathrm{A}_n}=\lambda\in\mathbb{R}$.

a) Montrer que pour $x\in\,]-1,1[$, la série $\sum \mathrm{C}_n x^n$ est convergente.

b) En déduire que la série $\sum c_n x^n$ est convergente pour $x\in\,]-1,1[$ et établir une relation entre $\sum_{n=1}^{+\infty}c_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{C}_n x^n$.

c) Montrer alors que $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{\sum_{n=1}^{+\infty}c_n x^n}{\sum_{n=1}^{+\infty}a_n x^n}=\lambda$.

Question 5. On définit les deux suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$a_n=\frac{1}{n} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}^* \quad\text{et}\quad c_n=\begin{cases}1 & \text{si } n \text{ est de la forme } 2^k, \text{ avec } k\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

a) Si $\mathrm{A}_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, montrer que $\mathrm{A}_n\underset{+\infty}{\sim}\ln n$.

b) Montrer que si $\mathrm{C}_n=\sum_{k=1}^{n}c_k$, alors $\frac{\ln n}{\ln 2}\leqslant \mathrm{C}_n\leqslant\frac{\ln n}{\ln 2}+1$.

c) Déduire de ce qui précède un équivalent quand x tend vers 1 de la somme $\sum_{k=0}^{+\infty}x^{2^k}$.