Corrigé : comparaison de fonctions développables en série entière (banque PT 1999 - extrait)

Partie I.

Question 1.

a) Puisque $\sum a_n$ est une série à termes positifs divergente, la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$ et en particulier, pour tout $A > 0$ il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N_1} a_n \geqslant 2A$.

b) N_1 étant ainsi fixé, l'application $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{N_1} a_n x^n$ est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{N_1} a_n x^n = \sum_{n=1}^{N_1} a_n$, ce qui implique l'existence de $\alpha > 0$ tel que : $1-\alpha \leqslant x \leqslant 1 \implies \Big|\displaystyle\sum_{n=1}^{N_1} a_n x^n - \sum_{n=1}^{N_1} a_n\Big| \leqslant A$. Grâce à la minoration de la question précédente, on obtient dans ces conditions : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N_1} a_n x^n \geqslant \sum_{n=1}^{N_1} a_n - A \geqslant A$.

c) Pour tout x de $]0,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{N_1} a_n x^n + \sum_{N_1+1}^{+\infty} a_n x^n \geqslant \sum_{n=1}^{N_1} a_n x^n$ donc d'après ce qui précède, pour tout $A > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que : $0 \leqslant 1-x \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant A$. Par définition, on a bien $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$.

Question 2.

a) Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$.

Commençons par supposer $\lambda \neq 0$. Dans ce cas, $b_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda a_n$ et les séries entières $\sum b_n x^n$ et $\sum \lambda a_n x^n = \lambda \sum a_n x^n$ ont même rayon de convergence, à savoir 1.

Considérons maintenant le cas où $\lambda = 0$. Dans ce cas on a $b_n \underset{+\infty}{=} o(a_n)$ donc le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum a_n x^n$, à savoir supérieur ou égal à 1.

b) Pour tout x de $]0,1[$, $f(x) > 0$ donc en particulier $f(x) \neq 0$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{f(x)} - \lambda &= \frac{1}{f(x)}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n - \lambda\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\Big) = \frac{1}{f(x)}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n x^n - \lambda\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\Big)\\ &= \frac{1}{f(x)}\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda_n - \lambda)a_n x^n.\end{aligned}$$

c) La suite $(\lambda_n - \lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc est bornée : il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\lambda_n - \lambda| \leqslant M$.

d) Par définition de la convergence d'une suite, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geqslant N_2$, $|\lambda_n - \lambda| \leqslant \epsilon$.

Pour tout $x \in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=N_2+1}^{+\infty} |\lambda_n - \lambda| a_n x^n \leqslant \epsilon \sum_{n=N_2+1}^{+\infty} a_n x^n \leqslant \epsilon\Big(\sum_{n=N_2+1}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\Big) = \epsilon f(x)$.

e) En exploitant les résultats précédents, on peut écrire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall x \in]0,1[,\ \Big|\frac{g(x)}{f(x)} - \lambda\Big| = \frac{1}{f(x)}\Big|\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda_n - \lambda)a_n x^n\Big| \leqslant \frac{1}{f(x)}\sum_{n=1}^{+\infty}|\lambda_n - \lambda| a_n x^n \leqslant \epsilon + \frac{M}{f(x)}\sum_{n=1}^{N_2} a_n x^n.$$

N_2 étant ainsi fixé (il ne dépend pas de x), puisque $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\sum_{n=1}^{N_2} a_n x^n = \sum_{n=1}^{N_2} a_n$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$, on en déduit : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{M}{f(x)}\sum_{n=1}^{N_2} a_n x^n = 0$, ce qui peut se traduire par l'existence de $\beta > 0$ tel que : $1-\beta \leqslant x \implies \Big|\displaystyle\frac{M}{f(x)}\sum_{n=1}^{N_2} a_n x^n\Big| \leqslant \epsilon$.

En résumé, nous avons montré que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\beta > 0$ tel que : $x \geqslant 1-\beta \implies \left|\dfrac{g(x)}{f(x)} - \lambda\right| \leqslant 2\epsilon$, ce qui signifie : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lambda$.

Partie II.

Question 3.

a) Pour tout $n \geqslant 1$, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \geqslant a_1 > 0$ donc la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie (H_1). Cette minoration montre en outre que A_n ne tend pas vers 0, d'où la divergence de la série $\sum A_n$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie donc la condition (H_3).

b) En prenant $x = 1$ dans la série entière $\sum A_n x^n$, on obtient la série divergente $\sum A_n$; le rayon de convergence de $\sum A_n x^n$ est donc au plus égal à 1.

c) Pour tout $r \in \,]0,1[$ on a : $A_n r^n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) r^n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_k r^k$. Cette dernière expression est la somme partielle d'une série à termes positifs convergente ; elle est donc majorée : il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k r^k \leqslant M$. A fortiori, $A_n r^n \leqslant M$.
Soit alors $x \in \,]-1,1[$ et $r \in \,]|x|,1[$. La suite $(A_n r^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, et par le lemme d'Abel, la série $\sum A_n x^n$ est absolument convergente. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum A_n x^n$ est au moins égal à 1. Finalement, ce rayon vaut donc 1. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie aussi la condition (H_2) de la partie I.

d) Pour tout $x \in \,]-1,1[$,
$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=1}^{n} A_k x^k &= \sum_{k=1}^{n} A_k x^k - \sum_{k=1}^{n} A_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} A_k x^k - \sum_{k=2}^{n+1} A_{k-1} x^k \\ &= A_1 x + \sum_{k=2}^{n} (A_k - A_{k-1}) x^k - A_n x^{n+1} = A_1 x + \sum_{k=2}^{n} a_k x^k - A_n x^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k x^k - A_n x^{n+1} \qquad (\text{car } A_1 = a_1).\end{aligned}$$
Pour $x \in \,]-1,1[$ la série $\sum A_n x^n$ converge, donc son terme général tend vers 0 et il en va de même de $A_n x^{n+1}$. Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient : $(1-x)\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Question 4.

a) On a $C_n|x|^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda A_n |x|^n$ si $\lambda \neq 0$, et $C_n|x|^n \underset{n\to+\infty}{=} o(A_n|x|^n)$ sinon. Dans les deux cas, on peut conclure à l'absolue convergence de $\sum C_n x^n$ pour tout $x \in \,]-1,1[$.

b) En effectuant une transformation analogue à celle du III.1c, on peut écrire : $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k x^k = (1-x)\sum\limits_{k=1}^{n} C_k x^k + C_n x^{n+1}$. Si x est dans $]-1,1[$, la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} C_k x^k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, et le terme $C_n x^{n+1}$ tend vers 0, donc la série $\sum c_n x^n$ est convergente. On obtient une relation entre les sommes par le même procédé qu'à la question 3d :
$$(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} C_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n.$$

c) On peut appliquer le résultat de la partie I aux suites $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\mathrm{C}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathrm{C}_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_n x^n} = \lambda$, et compte-tenu des relations entre les sommes, on a aussi : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n} = \lambda$.

Question 5.

a) Pour tout $k \geqslant 1$ on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ et pour tout $k \geqslant 2$: $\displaystyle\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ donc $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, soit $\ln(n+1) \leqslant \mathrm{A}_n \leqslant 1 + \ln n$. Il en résulte : $\mathrm{A}_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

b) Encadrons l'entier $n \geqslant 1$ par deux puissances successives de 2 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $2^p \leqslant n < 2^{p+1}$. Lorsque n est dans cet intervalle, $\mathrm{C}_n = p+1$. Or $2^p \leqslant n < 2^{p+1} \iff p\ln 2 \leqslant \ln n < (p+1)\ln 2 \iff p \leqslant \dfrac{\ln n}{\ln 2} < p+1$, soit $p = \left\lfloor \dfrac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor$. On a donc : $\dfrac{\ln n}{\ln 2} < \mathrm{C}_n \leqslant \dfrac{\ln n}{\ln 2} + 1$.

c) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie les conditions (H′). L'encadrement précédent permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{C}_n}{\mathrm{A}_n} = \dfrac{1}{\ln 2}$; on peut donc appliquer le résultat de la question 4c qui donne : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}} = \dfrac{1}{\ln 2}$, puis : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2^k} \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{\ln 2}$.