Approximation uniforme par les polynômes de Bernstein

Durée : libre

On considère une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, à qui on associe la suite de fonctions polynomiales définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad \mathrm{B}_n\big(f\big)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \qquad \binom{n}{k} \text{ désignant le coefficient binomial.}$$

Dans la première partie de ce problème, on démontre, dans le cas où f est lipschitzienne, que la suite de fonctions polynomiales $\big(\mathrm{B}_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Dans la seconde partie, on démontre que si f est de classe $\mathscr{C}^1$, la suite $\big(\mathrm{B}_n(f)'\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f' sur $[0,1]$, puis plus généralement, que si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ la suite $\big(\mathrm{B}_n(f)^{(p)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f^{(p)}$.

Partie I. Approximation uniforme des fonctions lipschitziennes

Question 1.

a) Calculer $\mathrm{B}_n(f_i)$ ($i \in \{0,1,2\}$) pour les fonctions suivantes :

$$f_0 : x \mapsto 1, \quad f_1 : x \mapsto x, \quad f_2 : x \mapsto x^2.$$

b) Dans chacun de ces cas, étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $\big(\mathrm{B}_n(f_i)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.

Question 2. Soit $\mu > 0$ un réel strictement positif. Pour tout réel $x \in [0,1]$, on considère les ensembles :

$$\mathrm{J}_{n,\mu}(x) = \left\{k \in [\![0,n]\!] \text{ tel que } \left|x - \frac{k}{n}\right| > \mu\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_{n,\mu}(x) = \left\{k \in [\![0,n]\!] \text{ tel que } \left|x - \frac{k}{n}\right| \leqslant \mu\right\}.$$

Montrer que : $\displaystyle\sum_{k\in \mathrm{J}_{n,\mu}(x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\mu^2}$.

Question 3. Montrer que pour tout réel $x \in [0,1]$,

$$\left|\mathrm{B}_n\big(f\big)(x) - f(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \tag{1}$$

On suppose désormais que f est *lipschitzienne*, c'est à dire qu'il existe une constante $\mathrm{M} > 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \ |f(x) - f(y)| \leqslant \mathrm{M}|x-y|.$$

Question 4.

a) Soit $\epsilon > 0$ un réel strictement positif. Montrer l'existence d'un réel $\mu > 0$ tel que :

$$\sum_{k\in \mathrm{K}_{n,\mu}(x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

b) Majorer les autres termes du second membre de l'inégalité (1).

c) En déduire que la suite de fonctions $\big(\mathrm{B}_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Partie II. Convergence de la suite des dérivées

On suppose désormais que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

Question 5.

a) Montrer que : $\mathrm{B}_{n+1}\big(f\big)'(x) = (n+1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right)x^k(1-x)^{n-k}$

b) En déduire l'existence de scalaires $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tel que :

$$\mathrm{B}_{n+1}\big(f\big)'(x) - \mathrm{B}_n\big(f'\big)(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f'(\alpha_k) - f'\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n-k} \quad \text{avec } \alpha_k \in \left]\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right[.$$

c) On suppose dans cette question f' lipschitzienne. Prouver que la suite de fonctions $\big(\mathrm{B}_n(f)' - \mathrm{B}_n(f')\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0, puis que la suite de fonctions $\big(\mathrm{B}_n(f)'\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f' sur $[0,1]$.

On suppose enfin que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

Question 6. Justifier à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que pour tout $p \in \mathbb{N}$ la fonction $f^{(p)}$ est lipschitzienne.

Question 7. On désigne par Δ l'opérateur qui à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $\big((\Delta u)_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n$$

et on définit par récurrence $\Delta^1 = \Delta$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ \Delta^{p+1} = \Delta^p \circ \Delta$.

a) Montrer que $(\Delta^2 u)_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$.

b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(\Delta^p u)_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(-1)^{p+j}u_{n+j}$.

Question 8. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel fixé, et $h > 0$. On associe à f la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(a+nh).$$

On note $\Delta^p f(a) = (\Delta^p u)_0$.

a) Exprimer $\Delta f(a)$, puis $\Delta^2 f(a)$.

b) Exprimer $\Delta^p f(a)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

c) Justifier l'existence de $\alpha \in]a, a+ph[$ tel que : $\Delta^p f(a) = h^p f^{(p)}(\alpha)$.

Question 9. On désigne par $\mathrm{B}_n^{(p)}(f)$ la dérivée d'ordre p de $\mathrm{B}_n(f)$.

a) Montrer que pour tout n et p dans $\mathbb{N}$,

$$\mathrm{B}_{n+p}^{(p)}\big(f\big)(x) = \frac{(n+p)!}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p}(-1)^{p-j}\binom{p}{j}f\left(\frac{k+j}{n+p}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

b) En déduire que si $\Delta^p f$ est l'application définie à la question 8 pour $h = \dfrac{1}{n+p}$, alors on a :

$$\mathrm{B}_{n+p}^{(p)}\big(f\big)(x) = \frac{(n+p)!}{n!}\sum_{k=0}^{n}\Delta^p f\left(\frac{k}{n+p}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Question 10.

a) Justifier l'existence de $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ vérifiant :

$$\frac{n!(n+p)^p}{(n+p)!}\mathrm{B}_{n+p}^{(p)}\big(f\big)(x) - \mathrm{B}_n\big(f^{(p)}\big)(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(f^{(p)}(\alpha_k) - f^{(p)}\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\ \text{avec } \alpha_k \in \left]\frac{k}{n+p}, \frac{k+p}{n+p}\right[.$$

b) En déduire que la suite de fonctions $\big(\mathrm{B}_n^{(p)}(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f^{(p)}$ sur $[0,1]$.