Corrigé : approximation uniforme par les polynômes de Bernstein

Partie I. Approximation uniforme des fonctions lipschitziennes

Question 1.

a) D'après la formule du binôme, $\mathrm{B}_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \big(x + (1-x)\big)^n = 1$ donc $\mathrm{B}_n(f_0) = f_0$.

$\mathrm{B}_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} = x\big(x + (1-x)\big)^n = x$ donc $\mathrm{B}_n(f_1) = f_1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_n(f_2)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} k x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (k-1) x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \mathrm{B}_n(f_1)(x) = \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-2-k} + \frac{1}{n} x = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{B}_n(f_2) : x \mapsto x^2 + \frac{1}{n} x(1-x)$.

b) Il est bien évident que les suites $\big(\mathrm{B}_n(f_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\mathrm{B}_n(f_1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément respectivement vers f_0 et f_1 puisqu'elles sont constantes. La suite $\big(\mathrm{B}_n(f_2)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, quant à elle, converge simplement vers f_2, et :

$$\|\mathrm{B}_n(f_2) - f_2\|_\infty = \frac{1}{n} \sup_{x\in[0,1]} |x(1-x)| = \frac{1}{4n}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \|\mathrm{B}_n(f_2) - f_2\|_\infty = 0$, la convergence de $\mathrm{B}_n(f_2)$ vers f_2 est uniforme.

c) Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(x - \frac{k}{n}\Big)^2 x^k (1-x)^{n-k} = x_2 \mathrm{B}_n(f_0)(x) - 2x\mathrm{B}_n(f_1)(x) + \mathrm{B}_n(f_2)(x) = x^2 - 2x^2 + x^2 + \frac{1}{n} x(1-x) = \frac{1}{n} x(1-x).$$

Question 2. Utilisons le fait que pour tout $k \in \mathrm{J}_{n,\mu}(x)$, $1 \leqslant \frac{1}{\mu^2}\Big(x - \frac{k}{n}\Big)^2$:

$$\sum_{k\in \mathrm{J}_{n,\mu}(x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\mu^2} \sum_{k\in \mathrm{J}_{n,\mu}(x)} \binom{n}{k} \Big(x - \frac{k}{n}\Big)^2 x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\mu^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(x - \frac{k}{n}\Big)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n\mu^2}.$$

D'où : $\sum_{k\in \mathrm{J}_{n,\mu}(x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\mu^2}$.

Question 3. On a : $f(x) = f(x) \times 1 = f(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ donc :

$$|\mathrm{B}_n(f)(x) - f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big[f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f(x)\Big] x^k (1-x)^{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left|f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f(x)\right| x^k (1-x)^{n-k}.$$

Question 4.

a) Pour tout $k \in \mathrm{K}_{n,\mu}(x)$, $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \mathrm{M}\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \mathrm{M}\mu$, donc :

$$\sum_{k \in \mathrm{K}_{n,\mu}(x)} \binom{n}{k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \mathrm{M}\mu \sum_{k \in \mathrm{K}_{n,\mu}(x)} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \mathrm{M}\mu \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \mathrm{M}\mu$$

donc en posant : $\mu = \frac{\epsilon}{2\mathrm{M}}$ on a bien : $\displaystyle\sum_{k \in \mathrm{K}_{n,\mu}(x)} \binom{n}{k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.

b) On peut noter que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \mathrm{M}\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant 2\mathrm{M}$ donc :

$$\sum_{k \in \mathrm{J}_{n,\mu}(x)} \binom{n}{k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| x^k(1-x)^{n-k} \leqslant 2\mathrm{M} \sum_{k \in \mathrm{J}_{n,\mu}(x)} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{\mathrm{M}}{2n\mu^2} = \frac{2\mathrm{M}^3}{n\epsilon^2}$$

(compte tenu de la majoration obtenue à la question I.2).

c) Nous avons donc montré que pour tout $\epsilon > 0$, $\|\mathrm{B}_n(f) - f\|_\infty \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\mathrm{M}^3}{n\epsilon^2}$.

Sachant que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2\mathrm{M}^3}{n\epsilon^2} = 0$, il existe un rang N à partir duquel : $\frac{2\mathrm{M}^3}{n\epsilon^2} \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $\|\mathrm{B}_n(f) - f\|_\infty \leqslant \epsilon$, ce qui prouve que $\big(\mathrm{B}_n(f)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Partie II. Convergence de la suite des dérivées

Question 5.

a) On a : $\displaystyle\mathrm{B}_{n+1}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) x^k(1-x)^{n+1-k}$ donc en dérivant :

$$\mathrm{B}_{n+1}(f)'(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) x^{k-1}(1-x)^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n} (n+1-k)\binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) x^k(1-x)^{n-k}.$$

Sachant que $k\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k-1}$ et $(n+1-k)\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k}$ on obtient en réindexant la première somme :

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_{n+1}(f)'(x) &= (n+1)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) x^k(1-x)^{n-k} - (n+1)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) x^k(1-x)^{n-k} \\
&= (n+1)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left[f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right] x^k(1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

b) D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $\alpha_k \in \left]\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right[$ tel que : $f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} f'(\alpha_k)$. Alors :

$$\mathrm{B}_{n+1}(f)'(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f'(\alpha_k) x^k(1-x)^{n-k}$$

et donc :

$$\mathrm{B}_{n+1}(f)'(x) - \mathrm{B}_n(f')(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(f'(\alpha_k) - f'\left(\frac{k}{n}\right)\right) x^k(1-x)^{n-k}.$$

c) Par hypothèse, il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, $|f'(x) - f'(y)| \leqslant \mathrm{M}|x - y|$.

En particulier, $\left|f'(\alpha_k) - f'\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \mathrm{M}\left|\alpha_k - \frac{k}{n}\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n+1}$, d'où :

$$\left|\mathrm{B}_{n+1}(f)'(x) - \mathrm{B}_n(f')(x)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{\mathrm{M}}{n+1}.$$

Ceci prouve que : $\|\mathrm{B}_{n+1}(f)' - \mathrm{B}_n(f')\|_\infty \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n+1}$, donc que la suite $\left(\mathrm{B}_{n+1}(f)' - \mathrm{B}_n(f')\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.
Or f' est lipschitzienne donc d'après la première partie, $\left(\mathrm{B}_n(f')\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f'. On en déduit que la suite de fonctions $\left(\mathrm{B}_n(f)'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f', en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\|\mathrm{B}_n(f)' - f'\|_\infty = \|\mathrm{B}_n(f)' - \mathrm{B}_n(f') + \mathrm{B}_n(f') - f'\|_\infty \leqslant \|\mathrm{B}_n(f)' - \mathrm{B}_n(f')\|_\infty + \|\mathrm{B}_n(f') - f'\|_\infty.$$

Question 6. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(p)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f^{(p)}(x) - f^{(p)}(y)| \leqslant \mathrm{M}|x-y|$$

avec $\mathrm{M} = \|f^{(p+1)}\|_{\infty,[0,1]}$, ce qui prouve que $f^{(p)}$ est lipschitzienne.

Question 7.

a) Pour tout entier n, $(\Delta^2 u)_n = (\Delta u)_{n+1} - (\Delta u)_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$.

b) Notons ∇ l'opérateur qui à une suite (u_n) associe la suite $\left((\nabla u)_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\nabla u)_n = u_{n+1}.$$

Nous avons $\Delta = \nabla - \mathrm{Id}$ donc d'après la formule du binôme : $\Delta^p = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(-1)^{p+j}\nabla^j$.

En particulier, $(\Delta^p u)_n = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(-1)^{p+j}(\nabla^j u)_n$. Or à l'évidence, $(\nabla^j u)_n = u_{n+j}$, donc : $(\Delta^p u)_n = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(-1)^{p+j}u_{n+j}$.

Question 8.

a) $\Delta f(a) = (\Delta u)_0 = u_1 - u_0 = f(a+h) - f(a)$.
$\Delta^2 f(a) = (\Delta^2 u)_0 = u_2 - 2u_1 + u_0 = f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)$.

b) Plus généralement, $\Delta^p f(a) = (\Delta^p u)_0 = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(-1)^{p+j}u_j = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(-1)^{p+j}f(a+jh)$.

c) Raisonnons par récurrence sur p.
– Lorsque $p = 1$, le théorème des accroissements finis affirme l'existence de $\alpha \in]a, a+h[$ tel que : $f(a+h) - f(a) = hf'(\alpha)$.
– Lorsque $p > 1$, supposons le résultat acquis au rang $p-1$.
Nous avons $\Delta^p f(a) = (\Delta^p u)_0 = (\Delta^{p-1}u)_1 - (\Delta^{p-1}u)_0 = (\Delta^{p-1}u)_1 - \Delta^{p-1}f(a)$.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$, et $g : x \mapsto f(x+h)$. Alors $(\Delta^{p-1}u)_1 = (\Delta^{p-1}v)_0 = \Delta^{p-1}g(a)$, et $\Delta^p f(a) = \Delta^{p-1}(g-f)(a)$.
D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $f-g$, il existe $\beta \in]a, a+(p-1)h[$ tel que : $\Delta^{p-1}(g-f)(a) = h^{p-1}(g-f)^{(p-1)}(\beta) = h^{p-1}\left(g^{(p-1)}(\beta) - f^{(p-1)}(\beta)\right) = h^{p-1}\left(f^{(p-1)}(\beta+h) - f^{(p-1)}(\beta)\right)$.
Or d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $\alpha \in]\beta, \beta+h[$ tel que : $f^{(p-1)}(\beta+h) - f^{(p-1)}(\beta) = hf^{(p)}(\alpha)$.
Puisque $]\beta, \beta+h[\subset]a, a+ph[$, on peut conclure : il existe $\alpha \in]a, a+ph[$ tel que $\Delta^p f(a) = h^p f^{(p)}(\alpha)$; la récurrence se propage.

Question 9.

a) Raisonnons par récurrence sur p.
– Lorsque $p = 0$, il ne s'agit que de la définition de $\mathrm{B}_n(f)$.
– Lorsque $p \geqslant 1$, supposons le résultat acquis au rang $p-1$, et appliquons-le pour l'entier $n+1$:

$$\mathrm{B}_{n+p}^{(p-1)}(f)(x) = \mathrm{B}_{(n+1)+(p-1)}^{(p-1)}(f)(x) = \frac{(n+p)!}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\left(\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^{p-1-j}\binom{p-1}{j}f\left(\frac{k+j}{n+p}\right)\right)\binom{n+1}{k}x^k(1-x)^{n+1-k}.$$

Dérivons alors cette expression :

$$\mathrm{B}_{n+p}^{(p)}(f)(x)=\frac{(n+p)!}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n+1}\left(\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^{p-1-j}\binom{p-1}{j}f\left(\frac{k+j}{n+p}\right)\right)k\binom{n+1}{k}x^{k-1}(1-x)^{n+1-k}$$
$$-\frac{(n+p)!}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^{p-1-j}\binom{p-1}{j}f\left(\frac{k+j}{n+p}\right)\right)(n+1-k)\binom{n+1}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}$$

Sachant que $k\binom{n+1}{k}=(n+1)\binom{n}{k-1}$ et $(n+1-k)\binom{n+1}{k}=(n+1)\binom{n}{k}$ on obtient, en réindexant la première somme :

$$\mathrm{B}_{n+p}^{(p)}(f)(x)=\frac{(n+p)!}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p}(-1)^{p-j}\binom{p-1}{j-1}f\left(\frac{k+j}{n+p}\right)\right)\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}$$
$$-\frac{(n+p)!}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^{p-1-j}\binom{p-1}{j}f\left(\frac{k+j}{n+p}\right)\right)\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}$$

soit : $\mathrm{B}_{n+p}^{(p)}(f)(x)=\dfrac{(n+p)!}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^p f\left(\frac{k}{n+p}\right)+\sum_{j=1}^{p-1}(-1)^{p-j}\left(\binom{p-1}{j-1}+\binom{p-1}{j}\right)f\left(\frac{k+j}{n+p}\right)+f\left(\frac{k+p}{n+p}\right)\right]\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}$.

En utilisant enfin la formule de Pascal, on obtient :

$$\mathrm{B}_{n+p}^{(p)}(f)(x)=\frac{(n+p)!}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{p}(-1)^{p-j}\binom{p}{j}f\left(\frac{k+j}{n+p}\right)\right]\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}$$

La récurrence se propage.

b) On reconnait immédiatement, en posant $h=\dfrac{1}{n+p}$:

$$\mathrm{B}_{n+p}^{(p)}(f)(x)=\frac{(n+p)!}{n!}\sum_{k=0}^{n}\Delta^p f\left(\frac{k}{n+p}\right)\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}.$$

Question 10.

a) D'après la question 8c, il existe $\alpha_k\in\left]\dfrac{k}{n+p},\dfrac{k+1}{n+p}\right[$ tel que $\Delta^p f\left(\dfrac{k}{n+p}\right)=\dfrac{1}{(n+p)^p}f^{(p)}(\alpha_k)$, ce qui conduit à :

$$\frac{n!(n+p)^p}{(n+p)!}\mathrm{B}_{n+p}^{(p)}\big(f\big)(x)-\mathrm{B}_n\big(f^{(p)}\big)(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[f^{(p)}(\alpha_k)-f^{(p)}\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}.$$

b) Posons $\mathrm{M}_{p+1}=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f^{(p+1)}(x)|$. D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\left|f^{(p)}(\alpha_k)-f^{(p)}\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant \mathrm{M}_{p+1}\left|\alpha_k-\frac{k}{n}\right|\leqslant \mathrm{M}_{p+1}\frac{p+1}{n+p}.$$

Ainsi, $\left|\dfrac{n!(n+p)^p}{(n+p)!}\mathrm{B}_{n+p}^{(p)}\big(f\big)(x)-\mathrm{B}_n\big(f^{(p)}\big)(x)\right|\leqslant \mathrm{M}_{p+1}\dfrac{p+1}{n+p}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}=\mathrm{M}_{p+1}\dfrac{p+1}{n+p}$.

Ceci prouve que $\left\|\dfrac{n!(n+p)^p}{(n+p)!}\mathrm{B}_{n+p}^{(p)}\big(f\big)-\mathrm{B}_n\big(f^{(p)}\big)\right\|_\infty\leqslant \mathrm{M}_{p+1}\dfrac{p+1}{n+p}$, donc que $\dfrac{n!(n+p)^p}{(n+p)!}\mathrm{B}_{n+p}^{(p)}\big(f\big)-\mathrm{B}_n\big(f^{(p)}\big)$ converge uniformément vers 0.

Mais la première partie appliquée à $f^{(p)}$ montre que $\mathrm{B}_n\big(f^{(p)}\big)$ converge uniformément vers $f^{(p)}$; on en déduit que $\dfrac{n!(n+p)^p}{(n+p)!}\mathrm{B}_{n+p}^{(p)}\big(f\big)$ converge uniformément vers $f^{(p)}$.

Il reste à montrer que $v_n=\dfrac{n!(n+p)^p}{(n+p)!}$ converge vers 1. En effet, $v_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{n+p}{n+k}\right)$ donc est le produit de p suites qui tendent vers 1. Ainsi, on peut conclure : pour tout entier $p\in\mathbb{N}$, la suite $\left(\mathrm{B}_n^{(p)}(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f^{(p)}$ sur l'intervalle $[0,1]$.