Séries de polynômes de Stirling

Durée : libre

Préambule

Pour tout entier naturel k on définit le polynôme Γ_k par :

$$\Gamma_0 = 1, \quad \Gamma_1 = X, \quad \Gamma_2 = \frac{X(X-1)}{2}, \quad \dots \quad \Gamma_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de ces polynômes et des séries du type $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(x)$ où x est une variable réelle et (a_n) une suite réelle.

Partie I.

On étudie dans cette partie quelques propriétés des polynômes Γ_k.

Question 1. Montrer que pour tout entier relatif x, $\Gamma_k(x)$ est aussi un entier relatif.
Calculer $\Gamma_k(k)$ et $\Gamma_k(-1)$.

Question 2. Établir pour tout entier $k \geqslant 1$ les formules :

$$\Gamma_k(X+1) - \Gamma_k(X) = \Gamma_{k-1}(X) \qquad \text{et} \qquad k\Gamma_k(X) = (X-k+1)\Gamma_{k-1}(X).$$

Question 3. Soit un polynôme Q de degré n. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout entier relatif x, $Q(x)$ est un entier relatif ;

(ii) il existe $n+1$ entiers relatifs consécutifs $x_0, \dots, x_n$ tels que les $Q(x_i)$ soient des entiers relatifs.

(iii) il existe des entiers relatifs $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que $Q(X) = a_0 + a_1\Gamma_1(X) + \dots + a_n\Gamma_n(X)$.

Pour prouver l'implication (ii) $\implies$ (iii) on raisonnera par récurrence sur le degré de Q, *en justifiant que* Q *est combinaison linéaire des polynômes* Γ_k *puis en appliquant l'hypothèse de récurrence au polynôme* $Q(X+1) - Q(X)$.

Partie II.

Question 4. Soit f une application de $[\alpha, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, où $\alpha \leqslant 0$.

a) Montrer qu'il existe une suite de réels (a_n) et une seule possédant la propriété suivante : pour tout n, la fonction $f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\Gamma_k(x)$ est nulle pour x égal aux $n+1$ entiers consécutifs $0, 1, 2, \dots, n$. *On construira la suite* (a_n) *par récurrence.*

La suite (a_n) sera dite suite *associée* à la fonction f.

b) Montrer que la suite associée à la fonction $x \mapsto b^x$ (avec $b > 0$) est $a_n = (b-1)^n$.

Question 5. On suppose de plus ici que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

a) On donne un réel $x \geqslant \alpha$. Montrer qu'il existe, pour tout entier naturel N, un réel $\theta \geqslant \alpha$ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k\Gamma_k(x) + \Gamma_{N+1}(x) f^{(N+1)}(\theta).$$

On pourra utiliser la fonction auxiliaire qui à t associe $f(t) - \sum_{k=0}^{N} a_k\Gamma_k(t) - A\Gamma_{N+1}(t)$ *où* A *est une constante convenablement choisie et appliquer le théorème de Rolle.*

b) En déduire que, pour tout n entier naturel, il existe un réel $\lambda_n \geqslant \alpha$ tel que $a_n = f^{(n)}(\lambda_n)$.

Partie III.

Soit (a_n) une suite donnée de nombres réels. On lui associe la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$. Dans cette partie, on étudie les propriétés de cette série.

Question 6. Soit x un réel fixé, non égal à un entier naturel. On considère la suite (μ_n) définie par $\mu_n = n^{\rho} |\Gamma_n(x)|$.

a) Étudier, selon le réel ρ, la nature de la série de terme général $u_n = \ln(\mu_{n+1}) - \ln(\mu_n)$.

b) Que peut-on en conclure pour la suite (μ_n) ? Montrer qu'il existe un réel strictement positif $\mathrm{K}(x)$, tel que l'on ait, quand n tend vers $+\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} n^{x+1} |\Gamma_n(x)| = \mathrm{K}(x).$$

On ne cherchera pas à calculer $\mathrm{K}(x)$.

Question 7. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ de $\mathbb{R}^{+}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante : il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout y positif et tout entier n supérieur ou égal à n_0, $|f^{(n)}(y)| \leqslant \mathrm{M}n$, M étant une constante strictement positive.

a) Soit (a_n) la suite associée à f, selon la définition donnée à la question 4a. Montrer que l'on a pour tout réel positif x : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$.

b) Que peut-on dire de f si pour tout entier naturel n on a $f(n) = 0$?

Question 8. Soient x et y deux réels, tous deux distincts d'un entier naturel. On suppose $y > x$. Que dire de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(y)$ si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$ converge absolument ?

Question 9. On considère, dans cette question, la série $\sum_{n=0}^{\infty} h^n \Gamma_n(x)$.

a) On suppose $|h| < 1$. Pour quels x la série est-elle convergente ?

b) Que se passe-t-il lorsque $|h| > 1$?

c) On prend $h = 1$. Pour quels x la série converge-t-elle ? Montrer que la somme est égale à 2^x.

On pourra appliquer la question 5a et s'en servir pour déterminer le signe de $2^x - \sum_{k=0}^{n} \Gamma_k(x)$.

♦ ♦
♦