Chapitre 6

Intégration

L'intégration est un concept fondamental en mathématiques, issu du calcul des aires. À ce titre, on peut considérer que ses racines se trouvent parmi les premiers calculs d'aires et de volumes de l'antiquité. Mais c'est à Leibniz, au XVII[e] siècle qu'on doit les fondements de la théorie de l'intégration, en particulier par l'introduction d'un symbolisme reliant intégration et dérivation. C'est d'ailleurs lui qui est à l'origine du symbole $\int$.
Il faut néanmoins attendre Riemann (en 1854) pour avoir une première théorie de l'intégration complète, c'est à dire une définition précise de ce qu'est une fonction *intégrable*. Par la suite, d'autres théories, plus élaborées, ont vu le jour, telles l'intégrale de Lebesgue (1902), ou encore l'intégrale de Kurzweil-Henstock (1950).

Ce premier chapitre étend la notion d'intégrale d'une fonction continue sur un segment, abordée en première année, au cas des fonctions continues par morceaux. Il s'agit essentiellement d'un chapitre de révision.

Dans ce chapitre nous supposerons importée la fonction quad du module `scipy.integrate`.

```
from scipy.integrate import quad
```

1. Intégration des fonctions continues par morceaux

1.1 Fonctions continues par morceaux

■ Subdivision d'un intervalle

Définition. — *Une* subdivision *d'un segment* $[a,b]$ *est une suite finie* $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ *vérifiant :*

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Le pas *de la subdivision est le réel* $p(\sigma) = \max\left\{t_{i+1} - t_i \;\middle|\; i \in [\![0, n-1]\!]\right\}$. *La subdivision est dite* régulière *lorsque* $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ t_{i+1} - t_i = p(\sigma)$, *soit encore :* $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\boxed{t_i = a + i\dfrac{b-a}{n}.}$

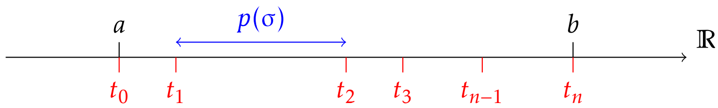


Figure 1 – Une subdivision du segment $[a,b]$.

Une subdivision σ' est *plus fine* qu'une subdivision σ lorsque σ est une sous-suite de σ'. On a alors $p(\sigma') \leqslant p(\sigma)$.

Remarque. Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a,b]$, il est intéressant d'observer que $\sigma \cup \sigma'$ est une subdivision plus fine que σ et σ'.

Définition. — *Une fonction numérique* $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ *est dite* continue par morceaux *s'il existe une subdivision* $\sigma = (t_0, \dots, t_n)$ *de* $[a,b]$ *telle que* f *soit sur tous les intervalles* $]t_k, t_{k+1}[$ *la restriction d'une fonction continue sur* $[t_k, t_{k+1}]$. *Une telle subdivision sera dite* adaptée *à* f.

Remarque. Concrètement, ceci signifie que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, f possède une limite (finie) à droite en t_i et à gauche en t_{i+1}. Notons en outre que la fonction f peut être continue en t_i, mais qu'à l'inverse toutes les discontinuités de f (qui doivent être en nombre fini) font partie des points de la subdivision σ (illustration figure 2).

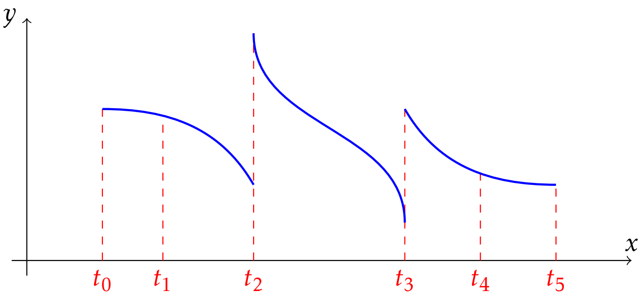


FIGURE 2 – Un exemple de fonction continue par morceaux et d'une subdivision (non minimale) qui lui est adaptée.

Qu'est ce qui peut empêcher une fonction définie sur un segment d'être continue par morceaux ?

- Cette fonction peut présenter un point en lequel il n'y a pas de limite à gauche ou à droite ; c'est par exemple le cas de la fonction $f_1 : x \mapsto \sin(1/x)$ sur le segment $[-1, 1]$ (quelle que soit la valeur choisie pour $f_1(0)$).
- Cette fonction peut présenter une limite infinie en un point ; c'est par exemple le cas de la fonction $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur le segment $[-1, 1]$, quel que soit le prolongement choisi pour $f_2(0)$.
- Cette fonction peut présenter un nombre *infini* de discontinuités ; c'est par exemple le cas de la fonction $f_3 : x \mapsto x\lfloor 1/x \rfloor$ prolongée par $f_3(0) = 1$, bien qu'elle possède en tout point une limite à gauche et à droite.

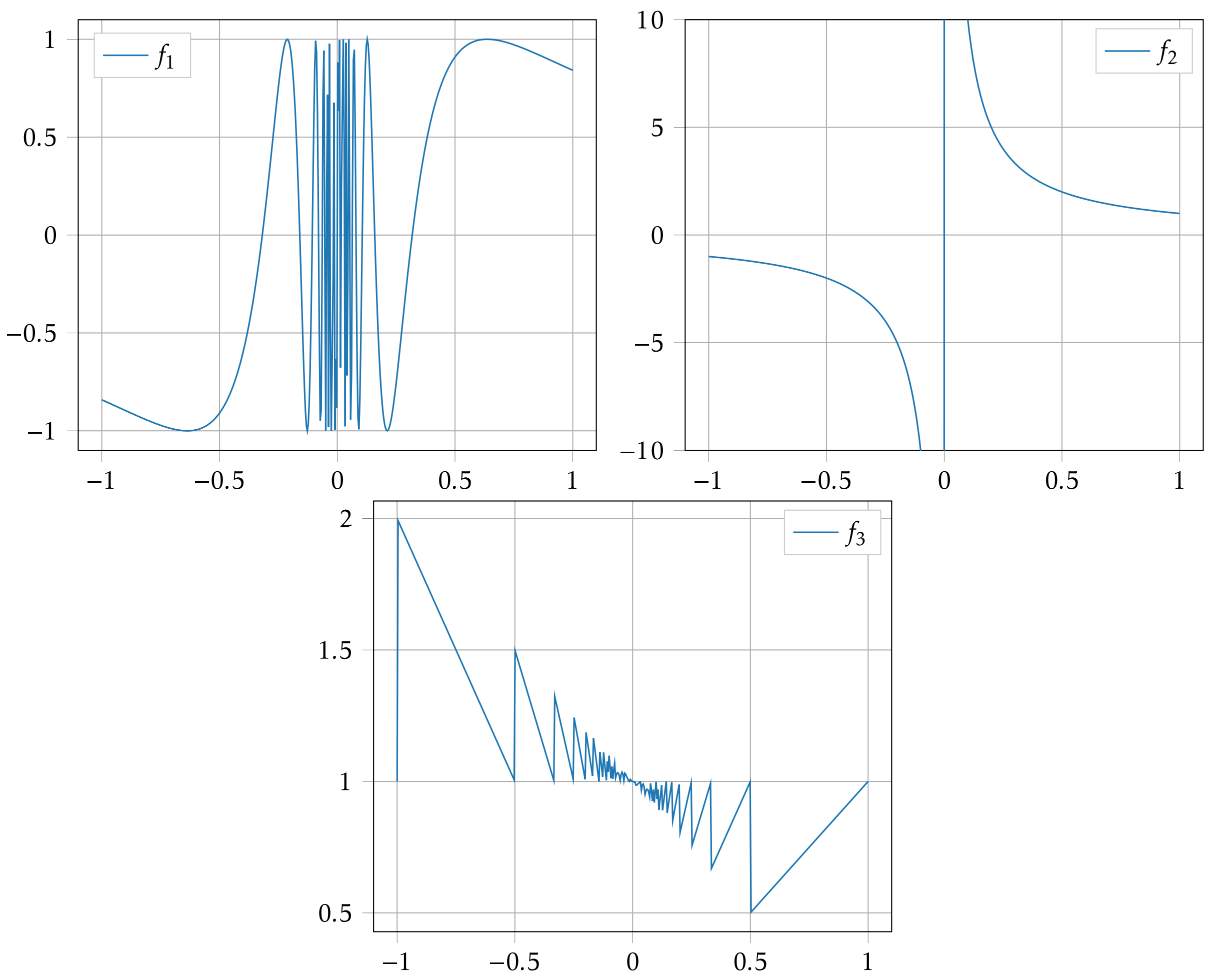


FIGURE 3 – Les fonctions f_1, f_2 et f_3 ne sont pas continues par morceaux sur $[-1, 1]$.

Remarque. Rappelons qu'une fonction $\phi : [a,b] \to \mathbb{K}$ est dite *en escalier* lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Bien entendu, toute fonction en escalier sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur cet intervalle.

Proposition 1.1 — *Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.*

Théorème 1.2 — *L'ensemble $\mathscr{C}_m^0([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{B}([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions bornées sur $[a,b]$. De plus, si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b]$, il en est de même de leur produit fg.*

Remarque. De la même façon, les fonctions en escalier constituent un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

• Fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque

Définition. — *Soit* I *un intervalle quelconque. Une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est dite* continue par morceaux *lorsque pour tout segment $[a,b]$ inclus dans* I*, la restriction de f à $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.*

Exemple. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$: elle possède en tout point une limite finie à gauche et à droite et, bien que ses discontinuités soient en nombre infini, ne possède qu'un nombre *fini* de discontinuité sur tout segment. Pour ces mêmes raisons, la fonction f_3 est continue par morceaux sur $]0,1]$. Elle n'est en revanche pas continue par morceaux sur $[0,1]$, bien qu'elle soit continue en 0 !

1.2 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Ceci étant posé, définir la valeur de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment ne pose pas de problème :

Définition. — *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, et $\sigma = (t_0 = a, t_1, \ldots, t_n = b)$ une subdivision adaptée à f. L'*intégrale *de f sur $[a,b]$ est alors la quantité :*

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. Pour valider cette définition, il faut montrer que cette valeur ne dépend pas du choix de la subdivision subordonnée à f, mais ceci ne présente pas difficulté.

• Cas d'une fonction en escalier

Si $\phi : [a,b] \to \mathbb{K}$ est une fonction en escalier et σ une subdivision qui lui est adaptée, si $v_k \in \mathbb{K}$ désigne la valeur que prend ϕ sur l'intervalle $]t_k, t_{k+1}[$, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} \phi = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) v_k$.

Lorsque $v_k \in \mathbb{R}_+$, cette quantité peut être interprétée comme l'aire délimitée par l'axe des abscisses et la fonction ϕ (illustration figure 4).

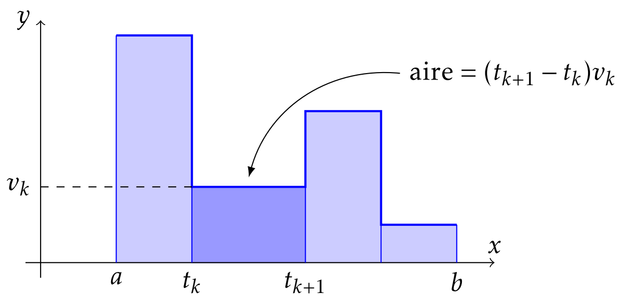


Figure 4 – Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction en escalier.

Nous admettrons que cette interprétation graphique reste pertinente pour une fonction continue par morceaux. Rappelons que cette interprétation géométrique est à la base de deux résultats du cours de première année : la notion de somme de Riemann, ainsi que les méthode des rectangles et des trapèzes pour le calcul approché d'une intégrale.

Théorème 1.3 (Sommes de Riemann) — *Si $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est une fonction continue sur le segment $[a,b]$ alors*

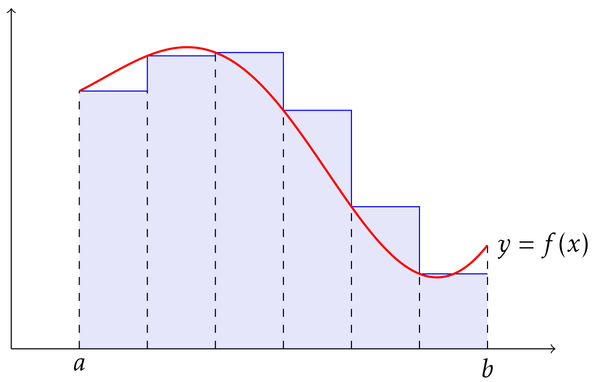
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 1. Déterminer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.

■ Méthode des rectangles et des trapèzes

Ces deux méthodes fournissent une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque f est continue sur $[a,b]$.

La méthode des rectangles consiste à approcher cette intégrale par une somme de Riemann, autrement dit à approcher f sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ par une valeur constante ($f(t_k)$ pour la méthode du rectangle gauche, $f(t_{k+1})$ pour la méthode du rectangle droit).



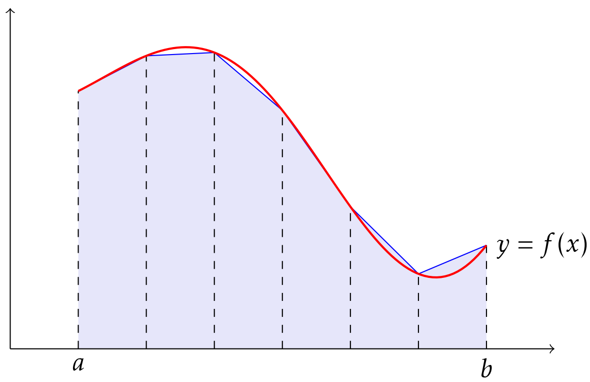


Figure 5 – Méthodes des rectangles gauches et méthode des trapèzes.

La méthode des rectangles gauches consiste donc à approcher $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par la somme de Riemann

$$\mathrm{R}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Exercice 2. Rédiger en Python une fonction `rectangle(f, a, b, n)` qui prend en arguments une fonction f (supposée continue sur $[a,b]$), deux réels a et b et un entier n et qui renvoie la quantité $\mathrm{R}_n(f)$.

Proposition 1.4 — *Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$, l'erreur $\mathcal{E}_n(f) = \left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{R}_n(f)\right|$ commise par la méthode des rectangles vérifie : $\mathcal{E}_n(f) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{2n}\|f'\|_\infty$.*

• Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à approcher f sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ par une fonction affine.

Exercice 3. Soit $\mathrm{T}_n(f)$ la quantité par laquelle on approche $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par la méthode des trapèzes. Montrer que $\mathrm{T}_n(f) = \mathrm{R}_n(f) + \left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{f(b)-f(a)}{2}$.

Remarque. Nous avons montré avec la proposition 1.4 que l'erreur $\mathcal{E}_n^{\mathrm{R}}(f)$ de la méthode des rectangles est d'ordre 1 : $\mathcal{E}_n^{\mathrm{R}}(f) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ (du moins lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$). Vous avez peut-être montré en cours d'informatique que l'erreur de la méthode des trapèzes $\mathcal{E}_n^{\mathrm{T}}(f) = \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{T}_n(f)\right|$ est d'ordre 2 : $\mathcal{E}_n^{\mathrm{T}}(f) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (lorsque f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$).
En pratique, ces deux méthodes sont trop lentes pour fournir des résultats acceptables : si on veut obtenir une valeur approchée avec une grande précision, il faut prendre une grande valeur pour n, ce qui engendre des erreurs numériques liées à la manipulation des nombres flottants (ce qui peut empêcher dans certains cas d'obtenir la précision souhaitée). Il est donc indispensable d'utiliser une méthode numérique plus efficace (la méthode de Simpson par exemple, est d'ordre 4), ou en Python d'utiliser la fonction `quad` du module `scipy.integrate` :

> `s = quad(f, a, b)` est un couple : `s[0]` est la valeur approchée de l'intégrale et `s[1]` une estimation de l'erreur commise.

Exemple. La fonction de Bessel du premier ordre est définie par l'expression $\mathrm{J}_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t - x\sin t)\,\mathrm{d}t$.
Il n'est pas possible d'exprimer cette fonction avec les fonctions usuelles ; il est néanmoins possible de la définir en Python à l'aide de la fonction `quad` :

```python
def J1(x):
    def f(t):
        return np.cos(t - x * np.sin(t))
    return quad(f, 0, np.pi)[0] / np.pi
```

```python
X = np.linspace(-10, 10, 256)
Y = [J1(x) for x in X]

plt.plot(X, Y)
plt.grid()

plt.show()
```

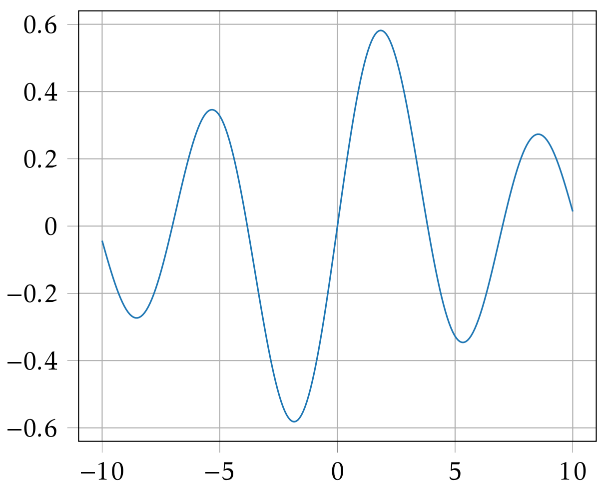


Figure 6 – Le graphe de la fonction J_1.

1.3 Propriétés de l'intégrale

Les propriétés suivantes, établies en première année dans le cas des fonctions continues, s'étendent au cas des fonctions continues par morceaux.

Proposition 1.5 — *L'application qui à une fonction continue par morceaux associe son intégrale sur $[a,b]$ est linéaire : si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b]$, alors* $\int_{[a,b]} (\lambda f + g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$.

Proposition 1.6 — *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Alors :* $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.

Remarque. La proposition 1.6 appliquée à une fonction *à valeurs réelles positives* implique le résultat suivant, dite propriété de *positivité* de l'intégrale :

$$\text{si } f:[a,b]\to\mathbb{R}_+ \text{ est continue par morceaux, alors } \int_{[a,b]} f \geqslant 0.$$

Une conséquence immédiate de ce résultat est la propriété dite de *croissance* de l'intégrale :

si f et g sont deux fonctions réelles continues par morceaux sur $[a,b]$ et telles que $f\leqslant g$, alors $\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

Corollaire — *Si $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ est continue par morceaux, alors :* $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant |b-a|.\|f\|_\infty$.

Enfin, sur le même sujet on rappellera un résultat important du cours de première année, *mais qui ne s'applique pas aux fonctions continues par morceaux* :

Proposition 1.7 — *Une fonction continue et à valeurs positives sur $[a,b]$ est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.*

Exercice 4. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour toute fonction en escalier $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ on ait $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $f=0$.

1.4 Dérivation et intégration

Nous allons maintenant rappeler un résultat vu en première année, souvent connu comme le *théorème fondamental de l'analyse* (le théorème 1.8 de ce document). Ce dernier établit un lien entre intégration et dérivation (un résultat en général attribué à Isaac Newton). Plus précisément, il affirme que le calcul d'une intégrale d'une fonction continue se ramène à la recherche d'une primitive de cette fonction.

■ Primitives et intégrale d'une fonction continue

Théorème 1.8 — *Soit I un intervalle, $f:\mathrm{I}\to\mathbb{K}$ une fonction continue, et $a\in\mathrm{I}$. Pour tout réel $x\in\mathrm{I}$, on note $\mathrm{F}(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $\mathrm{F}'=f$.*

Ce théorème ramène le calcul d'une intégrale à la recherche d'une primitive. Commençons par rappeler la définition suivante :

Définition. — *Soit f une fonction continue sur I. On dit qu'une application $g:\mathrm{I}\to\mathbb{K}$ est une* primitive *de f lorsque g est de classe $\mathscr{C}^1$, et lorsqu'en tout point de I, $g'(x)=f(x)$.*

Les primitives sur un intervalle sont définies « à une constante près » :

Proposition 1.9 — *Si g_1 et g_2 sont deux primitives de f, il existe une constante λ telle que $g_2=g_1+\lambda$.*

Nous pouvons donc préciser le résultat du théorème 1.8 en énonçant le résultat suivant :

Proposition 1.10 — *Soit f une fonction continue sur I, et $a\in\mathrm{I}$. On définit une fonction F sur I en posant : $\forall x\in\mathrm{I}$, $\mathrm{F}(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

Voici enfin le résultat qui permet de calculer une intégrale en recherchant une primitive :

COROLLAIRE — *Si f est continue et g une primitive quelconque de f, alors :* $\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2,\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = g(b) - g(a)$.

Exercice 5. Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une application strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $f(0) = 0$. Montrer, en appliquant le théorème 1.8, que :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad xf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

1.5 Changement de variable et intégration par parties

THÉORÈME 1.11 (changement de variable) — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une fonction continue, $[\alpha,\beta]$ un segment et $\phi : [\alpha,\beta] \to \mathrm{I}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Alors :*

$$\boxed{\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\phi(u)\big)\phi'(u)\,\mathrm{d}u.}$$

• **Mise en œuvre pratique**
Il y a deux façons d'utiliser cette formule : partir de l'expression de droite pour obtenir celle de gauche, ou procéder dans le sens contraire.

Utiliser la formule de la droite vers la gauche nécessite de reconnaître dans l'expression de l'intégrale à calculer $\int_\alpha^\beta g(u)\,\mathrm{d}u$ un terme de la forme $g(u) = f\big(\phi(u)\big)\phi'(u)$ (il faut donc « deviner » f et ϕ).
Dans ce cas, il faut donc identifier les expressions $t = \phi(u)$ et $\mathrm{d}t = \phi'(u)\,\mathrm{d}u$.

Exemple. Soit $\mathrm{I} = \int_0^\pi \frac{\sin u}{3+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u$. On pose $t = \cos u$ de manière à avoir $\mathrm{d}t = -\sin u\,\mathrm{d}u$. Ainsi,

$$\mathrm{I} = \int_{\cos 0}^{\cos\pi} \frac{-\mathrm{d}t}{3+t^2} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+(t/\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\arctan\Big(\frac{t}{\sqrt{3}}\Big)\Big]_{-1}^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 6. Calculer l'intégrale $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}+2u}$.

Utiliser la formule de la gauche vers la droite est souvent utilisé pour faire apparaître une simplification dans l'expression initiale. Une fois posés $t = \phi(u)$ et $\mathrm{d}t = \phi'(u)\,\mathrm{d}u$ il faut trouver des antécédents par ϕ des bornes de l'intégrale initiale.

Exemple. Soit $\mathrm{I} = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$. On pose $t = \sin u$ et $\mathrm{d}t = \cos u\,\mathrm{d}u$. On choisit $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$ pour avoir $\sin\alpha = 0$ et $\sin\beta = 1$. Ainsi :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\sqrt{1-\sin^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^2\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u = \Big[\frac{u}{2} - \frac{1}{4}\sin(2u)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 7. Calculer $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{t^2-1}}$.

THÉORÈME 1.12 (intégration par parties) — *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors :*

$$\boxed{\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Cette formule peut être représentée par le schéma suivant :

$$\begin{array}{c|cc|} + & f(t) & g'(t) \\ - & f'(t) & g(t) \end{array}$$

Le terme de gauche de la formule se retrouve sur la première ligne, le terme entre crochets sur la diagonale, et le reste intégral sur la dernière ligne :

$$\begin{array}{c|cc|} + & f(t) & g'(t) \\ \hline - & f'(t) & g(t) \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|} + & f(t) & g'(t) \\ - & f'(t) & g(t) \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|} + & f(t) & g'(t) \\ - & f'(t) & g(t) \\ \hline \end{array}$$

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \qquad = \qquad \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b \qquad + \qquad -\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

L'intérêt de ce schéma est de permettre d'effectuer plusieurs intégrations par parties successives en une seule étape ; voici par exemple les schémas pour effectuer deux puis trois intégrations par parties successives, et les formules correspondantes :

$$\begin{array}{c|cc|} + & f(t) & g''(t) \\ - & f'(t) & g'(t) \\ + & f''(t) & g(t) \end{array} \qquad \int_a^b f(t)g''(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\Big]_a^b + \int_a^b f''(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{array}{c|cc|} + & f(t) & g^{(3)}(t) \\ - & f'(t) & g''(t) \\ + & f''(t) & g'(t) \\ - & f^{(3)}(t) & g(t) \end{array} \qquad \int_a^b f(t)g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g''(t) - f'(t)g'(t) + f''(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f^{(3)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 8. En effectuant autant d'intégrations par parties que nécessaire, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 \sin t\,\mathrm{d}t$.

1.6 Formules de Taylor

Lorsque $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, on peut écrire : $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$.
Cette relation va avoir plusieurs conséquences, à commencer par le résultat suivant :

Théorème 1.13 (Inégalité des accroissements finis) — *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. On suppose l'existence d'un réel k tel que : $\forall t \in [a,b]$, $|f'(t)| \leqslant k$. Alors :* $\boxed{|f(b) - f(a)| \leqslant k|b-a|.}$

La généralisation de cette majoration va passer par plusieurs intégrations par parties successives. En effet, si on adopte le schéma suivant on obtient :

$$\begin{array}{c|cc|} + & f'(t) & 1 \\ - & f''(t) & t-b \end{array} \qquad f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

En réitérant ce procédé, ceci nous amène au théorème suivant :

Théorème 1.14 (Formule de Taylor avec reste intégral) — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, et $a \in \mathrm{I}$. Alors :* $\forall x \in \mathrm{I}$, $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.}$

Remarque. $\mathrm{T}_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ est une fonction polynomiale, appelée *polynôme de Taylor* d'ordre n de f en a. C'est un polynôme dont les dérivées successives jusqu'au rang n coïncident au point a avec celles de f. La quantité $\mathrm{R}_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ est l'expression intégrale de l'erreur qu'on commet en approchant $f(x)$ par $\mathrm{T}_n(x)$.
Pour majorer cette erreur, on utilise le résultat suivant :

Proposition 1.15 (inégalité de Taylor-Lagrange) — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, et $a \in \mathrm{I}$. On suppose l'existence d'un réel M vérifiant : $\forall t \in \mathrm{I}$, $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant \mathrm{M}$. Alors :*

$$\boxed{\left|f(x) - \mathrm{T}_n(x)\right| \leqslant \mathrm{M}\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.}$$

Exercice 9. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1 à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et en déduire que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$.

Notons pour finir que la fonction $f^{(n+1)}$ (étant supposée continue) est bornée au voisinage de a, ce qui nous permet de déduire de l'inégalité de Taylor-Lagrange le résultat suivant :

Corollaire (Formule de Taylor-Young) — *Soit I un intervalle, $a \in \mathrm{I}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors f admet au voisinage de a le développement limité suivant :*

$$\boxed{f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{O}\big((x-a)^{n+1}\big).}$$

2. Exercices

Intégration des fonctions continues par morceaux

Exercice 10 Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Déterminer la limite $\lim_{n \to +\infty} n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On suppose que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Établir que : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ell$.

Exercice 12 En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$.

Dérivation et intégration

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $g : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $g'(x) = \int_0^x \cos(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ et solution de l'équation différentielle $x'' + x = f(x)$.

c) Quel est l'ensemble des solutions de cette équation différentielle ?

Exercice 14 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant : $\forall t \in [a,b]$, $f(a+b-t) = f(t)$. Montrer que : $\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, et en déduire la valeur de $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 15 Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$, et en déduire $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t + \sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 16 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n), et calculez u_0 et u_1.
À l'aide de ces valeurs et de la relation de récurrence, rédiger une fonction Python qui prend en argument l'entier n et renvoie u_n.

Exercice 17 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue à valeurs strictement positives, et $\mathrm{I} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer l'existence d'une subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{I}}{n}$.
Quelle est la limite de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$?

Exercice 18 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, et $\mathrm{M}_2 = \sup_{t\in[a,b]} \|f''(t)\|$.
Montrer que : $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M}_2 \frac{(b-a)^3}{12}$. On pourra procéder à deux intégrations par parties successives.

Exercice 19 Soient α et β deux réels tels que $0 < \alpha < \beta$. Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$. Trouver la limite de f lorsque x tend vers 0.

Exercice 20 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$, et $s_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0)$. Déterminer la limite de la suite (s_n).

Exercice 21 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées. On pose $\mathrm{M}_0 = \|f\|_\infty$ et $\mathrm{M}_2 = \|f''\|_\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$, établir que pour tout $h > 0$,

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2\mathrm{M}_0}{h} + \frac{h\mathrm{M}_2}{2}$$

puis en déduire que $\|f'\|_\infty \leqslant 2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$.
En utilisant cette fois les inégalités de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ ainsi qu'entre x et $x-h$, établir que

$$|f'(x)| \leqslant \frac{\mathrm{M}_0}{h} + \frac{h\mathrm{M}_2}{2}$$

et en déduire que $\|f'\|_\infty \leqslant \sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$.