Chapitre 7
Intégration sur un intervalle

La notion d'intégrale que nous avons définie présente des limitations : l'intervalle d'intégration doit-être un segment, et la fonction, continue par morceaux. Dans le cadre des fonctions à valeurs positives, ceci permet d'interpréter l'intégrale comme étant l'*aire* délimitée par le graphe de la fonction.
Lorsque l'intervalle d'intégration n'est plus un segment, le domaine délimité par la fonction peut ne plus être borné. Nous allons voir cependant que dans certains cas il reste possible de donner un sens à l'aire de ce domaine, par le biais d'un passage à la limite dans des intégrales : c'est la notion d'intégrale *généralisée*.

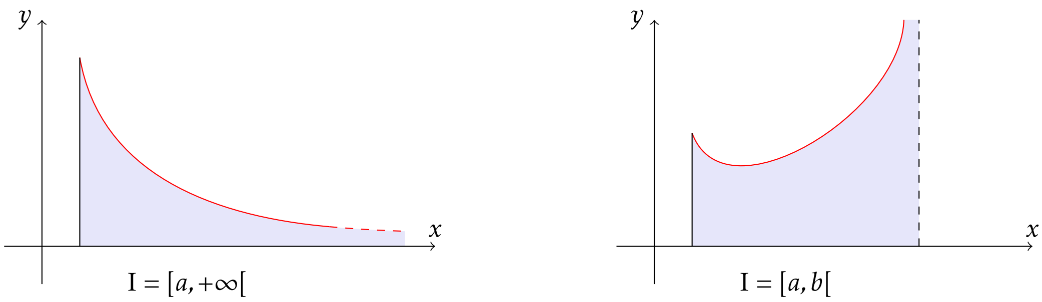


Figure 1 – Deux exemples de domaines non bornés, soit parce que l'une des deux bornes est infinie, soit parce que f n'admet pas de limite finie en une des deux bornes.

Nous verrons que cette intégrale généralisée partage un certain nombre de propriétés avec l'intégrale définie, avant d'étudier un théorème d'interversion limite-intégrale adapté aux intégrales généralisées : le théorème de convergence dominée.

1. Intégrales généralisées

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. L'objectif est de donner un sens, lorsque c'est possible, à l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f$; on parlera alors d'intégrale *généralisée*, ou encore d'intégrale *impropre*.

1.1 Intégrales convergentes

Si I n'est pas un segment, I ne peut prendre qu'une des trois formes suivantes : $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Nous allons traiter séparément chacun de des trois cas.

■ Le cas où $\mathrm{I} = [a,b[$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Pour tout $x \in [a,b[$, f est continue par morceaux sur le segment $[a,x]$, donc $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a bien un sens.

Définition. — *On dira que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est* convergente *lorsque* $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *possède une limite finie quand x tend vers b en restant dans $[a,b[$. On notera alors :*

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

On notera que lorsque f est prolongeable par continuité en b, cette définition est en cohérence avec la notion d'intégrale sur le segment $[a,b]$ puisque dans ce cas, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une application définie et continue sur $[a,b]$, et en particulier en b. Dans ces conditions, on dira que l'intégrale est *faussement impropre*, puisqu'elle ne correspond pas à l'aire d'un domaine non borné : en prolongeant par continuité la fonction f en b on retrouve l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Remarque. On ne manquera pas de noter la similitude de la démarche avec celle utilisée pour définir la somme d'une série : à la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ correspondent les sommes partielles $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} u_k$, et il s'agit dans les deux cas de déterminer si ces expressions possèdent une limite (l'une en b, l'autre en $+\infty$).

Exemples.

- L'intégrale de Rieman $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

Pour étudier la convergence des deux exemples précédents, il a été nécessaire de calculer les « intégrales partielles » puis de passer à la limite. En revanche, il n'est pas nécessaire de procéder à ce calcul dans le cas de l'intégrale suivante : $\int_0^1 (t-1)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ puisqu'il s'agit d'une intégrale faussement impropre : en effet, $\lim\limits_{t\to 1}(t-1)\ln(1-t) = 0$. Comme on peut le constater sur le graphe ci-dessous, le domaine délimité par le graphe de la fonction est borné :

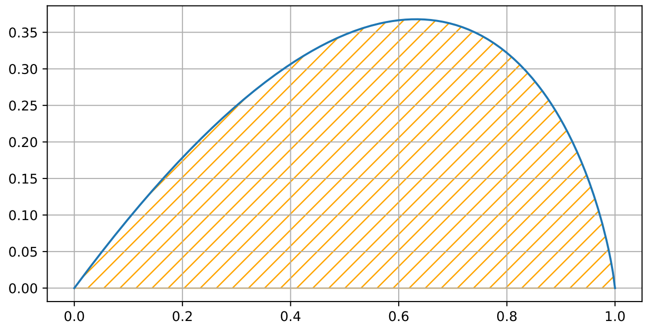


FIGURE 2 – Le graphe de la fonction $t \mapsto (t-1)\ln(1-t)$.

Exercice 1. Discuter en fonction de la valeur de $\beta > 0$ la convergence de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$.

■ Le cas où $\mathrm{I} =]a,b]$, $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$

DÉFINITION. — *De manière symétrique, on dira que l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente lorsque* $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *possède une limite finie quand x tend vers a en restant dans $]a,b]$. On notera alors :*

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Exemples.

- L'intégrale de Rieman $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
- L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et est égale à -1.

En revanche, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est faussement impropre, car $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.

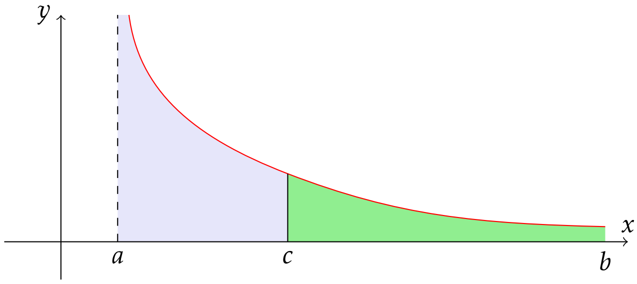
Exercice 2. Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$.

■ Le cas où $\mathrm{I} =]a,b[$

Dans ce dernier cas, nous allons utiliser la relation de Chasles pour nous ramener aux deux cas précédents. Considérons en effet un point c de l'intervalle $]a,b[$.

Définition. — *On dira que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *est convergente lorsque les deux intégrales* $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ *et* $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ *sont convergentes, et on posera alors :*

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.}$$



Il est aisé de vérifier que cette définition ne dépend pas du choix du point $c \in]a,b[$.

Remarque. Pour chacun des trois types d'intervalles, une intégrale qui n'est pas convergente sera bien entendu dite *divergente*.

Par exemple, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est toujours divergente, puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ ne converge que si $\alpha < 1$, alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ ne converge que si $\alpha > 1$.

Remarque. Cette définition permet d'étendre sans peine au cas des intégrales convergentes la relation de Chasles et la propriété de linéarité des intégrales :

– Si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_b^c f(t)\,dt$ sont convergentes, il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$, et : $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$.

– Si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ sont convergentes, alors il en est de même de $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,dt$, et : $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.

Exercice 3. Montrer que si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)\,dt = 0$.

Si on suppose de plus f décroissante, en déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Toujours en supposant f décroissante, montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

■ Intégration par parties et changement de variable

Une intégration par parties sur un intervalle qui n'est pas un segment peut conduire à une erreur : l'intégrale $\int_I u'v$ peut être convergente sans que $\int_I uv'$ le soit. Il convient donc de procéder avec prudence, en utilisant le résultat suivant :

Théorème 1.1 — *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, telles que les limites aux bornes de I du produit uv existent. Alors les intégrales $\int_I u'v$ et $\int_I uv'$ ont même nature, et en cas de convergence,*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

où a et b désignent les bornes de I.

Remarque. Une autre possibilité consiste à effectuer l'intégration par parties sur un segment (par exemple sur $[a,x]$ lorsque $\mathrm{I} = [a,b[$), puis, une fois tous les calculs effectués, passer à la limite (ici en faisant tendre x vers b).

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale : $\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $n!$.

> **Exercice 4.** Justifier la convergence et calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t$.

En ce qui concerne le changement de variable, on possède le résultat suivant :

Théorème 1.2 — *Soient I et J deux intervalles, $\phi : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ une bijection de classe $\mathscr{C}^1$, et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Alors les intégrales $\int_I f$ et $\int_J (f\circ\phi)\times\phi'$ ont même nature, et en cas de convergence,*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f\circ\phi(t)\phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

lorsque a et b désignent les extrémités de J et $\phi(a)$ et $\phi(b)$ les limites respectives de ϕ en a et en b.

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 (\ln u)^n\,\mathrm{d}u$ est convergente et vaut $(-1)^n n!$.

> **Exercice 5.** Justifier la convergence et calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1.2 Fonctions à valeurs positives

L'inconvénient de la démarche que nous avons suivi jusqu'à présent est de nécessiter le calcul d'une primitive de f pour déterminer la nature de l'intégrale $\int_I f$; or cela n'est pas toujours possible. Nous allons donc tenter de nous affranchir de cette contrainte, en commençant par nous intéresser aux fonctions à valeurs positives.

En effet, lorsque $f : [a,b[\to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue par morceaux et à valeurs *positives*, l'application $\mathrm{F} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction *croissante*. Elle possède donc une limite lorsque x tend vers b si et seulement si elle est *majorée*[1].

1. On ne manquera pas de faire l'analogie avec les séries à terme général positif : lorsque (u_n) est une suite positive, la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est croissante, et la série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

De la même façon, lorsque $f :]a,b] \to \mathbb{R}_+$ est continue par morceaux et à valeurs *positives*, l'application $F : x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$ est *décroissante* et possède donc une limite lorsque x tend vers a si et seulement si elle est *majorée*.

Comme pour les séries, ces résultats vont engendrer plusieurs théorèmes de comparaison, qui reposent tous sur le résultat suivant :

Théorème 1.3 (comparaison) — *Soient f et g deux fonction continues par morceaux sur l'intervalle I, et à valeurs positives. On suppose que pour tout $t \in I$, $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$. Alors la convergence de l'intégrale $\int_I g$ entraîne celle de $\int_I f$.*

De ce théorème vont résulter deux corollaires, qui vont permettre de comparer la nature des intégrales que nous allons rencontrer par la suite à la nature d'intégrales de référence. Ces deux corollaires seront énoncés dans le cas où $I = [a,b[$, mais leur énoncé s'adapte sans problème au cas symétrique où $I =]a,b]$.

Corollaire (domination) — *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}_+$ et $g : [a,b[\to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux, à valeurs positives, telles que $f(t) \underset{b}{=} O\big(g(t)\big)$. Alors la convergence de $\int_a^b g(t)\,dt$ entraîne celle de $\int_a^b f(t)\,dt$.*

Corollaire (équivalence) — *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}_+$ et $g : [a,b[\to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux, à valeurs positives, telles que $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$. Alors les intégrales $\int_a^b g(t)\,dt$ et $\int_a^b f(t)\,dt$ ont même nature.*

Remarque. Les intégrales de référence que nous utiliserons sont les suivantes :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha > 1, \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha < 1, \quad \int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt \text{ converge ssi } a > 0.}$$

Exercice 6. À l'aide du théorème d'équivalence, prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)\sqrt{t^2+4}}$ converge.

À l'aide du théorème de domination, prouver que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$ converge.

À l'aide d'un changement de variable, prouver que l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge.

1.3 Absolue convergence

La section précédente nous a donné des outils pour prouver la convergence des intégrales des fonctions à valeurs positives. Dans le cas général, nous allons nous y ramener à l'aide de la notion d'absolue convergence, notion semblable à celle que l'on connait déjà dans le cadre des séries numériques.

Théorème 1.4 — *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, telle que l'intégrale : $\int_I |f|$ soit convergente. Alors il en est de même de l'intégrale $\int_I f$. On dira que cette dernière intégrale est* absolument convergente, *et que la fonction f est* intégrable *sur I.*

Exemple. La fonction Γ est une fonction mathématique définie sur une partie du plan complexe par la formule : $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{z-1}\,dt$.

En posant $\alpha = \mathfrak{Re}(z)$ nous avons $|e^{-t}\,t^{z-1}| = e^{-t}\,t^{\alpha-1}$; étudions donc la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{\alpha-1}\,dt$.

– Au voisinage de 0, $e^{-t}\,t^{\alpha-1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}}$, donc (théorème d'équivalence) $\int_0^1 e^{-t}\,t^{\alpha-1}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

– Au voisinage de $+\infty$, $e^{-t}\,t^{\alpha-1} \underset{+\infty}{=} O(e^{-t/2})$, donc (théorème de domination) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,t^{\alpha-1}\,dt$ converge pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.

On en déduit que la fonction Γ est définie *au moins* lorsque $\mathfrak{Re}(z)>0$.

Remarque. La propriété la plus simple de la fonction Γ est de vérifier la relation : $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, qui résulte d'une intégration par parties :

$$\int_x^y e^{-t}\,t^z\,dt=\Big[-e^{-t}\,t^z\Big]_x^y+\int_x^y e^{-t}\,zt^{z-1}\,dt=e^{-x}x^z-e^{-y}y^z+z\int_x^y e^{-t}\,t^{z-1}\,dt$$

qui conduit en faisant tendre x vers 0 et y vers $+\infty$ à : $\Gamma(z+1)=0-0+z\Gamma(z)$.
Sachant que $\Gamma(0)=1$ on en déduit aisément la relation : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n)=(n-1)!$; d'une certaine façon, la fonction Γ prolonge donc la fonction factorielle à une partie de $\mathbb{C}$.

Nous pouvons enfin traduire le théorème 1.3 et ses corollaires en termes d'intégrabilité :

Théorème 1.5 — *Soit $f:I\to\mathbb{C}$ et $g:I\to\mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux, telles que $0\leqslant|f|\leqslant g$. Si g est intégrable sur I, il en est de même de f, et $\left|\int_I f\right|\leqslant\int_I g$.*

Corollaire — *Soit $f:[a,b[\,\to\mathbb{C}$ et $g:[a,b[\,\to\mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux telles que $|f(t)|\underset{b}{=}O(g(t))$. Alors si g est intégrable sur $[a,b[$, il en est de même de f.*

Corollaire — *Soit $f:[a,b[\,\to\mathbb{C}$ et $g:[a,b[\,\to\mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux telles que $|f(t)|\underset{b}{\sim}g(t)$. Alors si g est intégrable sur $[a,b[$, il en est de même de f.*

Les deux derniers résultats s'étendent bien entendu au cas de l'intervalle $]a,b]$.

■ Un exemple de semi-convergence

La notion d'intégrabilité que nous venons de définir est la seule qui généralise de manière pertinente la notion d'intégration sur un segment ; en effet nous verrons dans la section suivante que les différents théorèmes relatifs aux intégrales à paramètre exigent une hypothèse d'intégrabilité.

Cependant, il existe des intégrales qui sont convergentes sans être absolument convergentes : l'intégrale $\int_I f$ converge mais l'intégrale $\int_I |f|$ diverge. On dit dans ce cas que l'intégrale $\int_I f$ est *semi-convergente*. Attention, dans ce cas la fonction f **n'est pas** intégrable sur I (tout en possédant une intégrale, ce qui peut paraître paradoxal).

L'étude de la semi-convergence n'est pas un objectif du programme, aussi nous nous contenterons de voir un seul exemple :

Proposition 1.6 — *L'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ est semi-convergente.*

■ Espaces L^1 et L^2

Si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, on note $L^1_{cpm}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f:I\to\mathbb{K}$ continues par morceaux et intégrables sur I, et $L^2_{cpm}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f:I\to\mathbb{K}$ continues par morceaux et de carrés intégrables sur I :

$$L^1_{cpm}(I,\mathbb{K})=\left\{f\in\mathscr{C}^0_{pm}(I,\mathbb{K})\ \middle|\ \int_I|f|\ \text{converge}\right\}$$
$$L^2_{cpm}(I,\mathbb{K})=\left\{f\in\mathscr{C}^0_{pm}(I,\mathbb{K})\ \middle|\ \int_I|f|^2\ \text{converge}\right\}$$

Théorème 1.7 — $L^1_{cpm}(I,\mathbb{K})$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Proposition 1.8 — *Si f est continue et intégrable sur* I*, alors* $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} |f| = 0$ *implique* $f = 0$.

Remarque. Si on se restreint à l'espace $\mathrm{L}^1_c(\mathrm{I},\mathbb{K})$ des applications continues et intégrables, la propriété précédente montre que l'application $f \mapsto \|f\|_1 = \displaystyle\int_{\mathrm{I}} |f|$ est une norme sur cet espace.

Lemme — *Si f et g sont de carré intégrable sur* I*, la fonction fg est intégrable sur* I.

Théorème 1.9 — $\mathrm{L}^2_{cpm}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Remarque. Si on se restreint à l'espace $\mathrm{L}^2_c(\mathrm{I},\mathbb{K})$ des applications continues de carré intégrable, l'application $f \mapsto \|f\|_2 = \left(\displaystyle\int_{\mathrm{I}} |f|^2\right)^{1/2}$ est une norme sur cet espace. De plus, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cette norme est euclidienne et dérive du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_{\mathrm{I}} fg$. En particulier, on notera l'expression de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_{\mathrm{I}} fg\right| \leqslant \left(\int_{\mathrm{I}} |f|^2 \int_{\mathrm{I}} |g|^2\right)^{1/2}$$

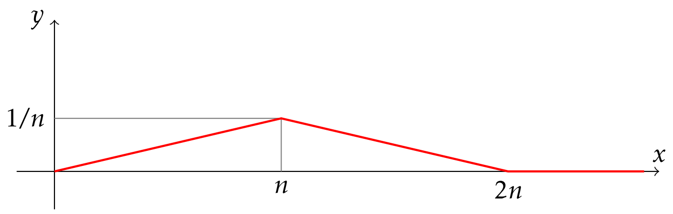
On notera que cette inégalité reste vraie pour des fonctions seulement supposées continues par morceaux.

2. Le théorème de convergence dominée

Nous avons vu dans le chapitre sur les suites de fonctions que sous réserve d'une hypothèse de convergence uniforme sur le segment $[a,b]$, on pouvait intervertir passage à la limite et intégration :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Malheureusement, ce théorème *ne s'étend pas* au cas de l'intégration sur un intervalle quelconque, comme le montre l'exemple suivant :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est la fonction continue et affine par morceaux dont le graphe est donné ci-dessous :



Puisque $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$, la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$. Pourtant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n$.
Nous allons maintenant étudier un théorème permettant de faire une telle interversion dans le cadre d'un intervalle *quelconque*, segment ou pas. Cependant, la preuve de ce résultat sera admise, car inaccessible à ce niveau.

2.1 Le théorème de convergence dominée

Ce théorème s'applique aux fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Théorème 2.1 (Théorème de convergence dominée) — *Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux sur* I*. On suppose que :*

(i) *(f_n) converge simplement sur* I *vers une fonction f continue par morceaux ;*

(ii) il existe une fonction positive φ, continue par morceaux et intégrable sur I, *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leqslant \varphi \quad \textit{(hypothèse de domination).}$$

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I, *et :* $\boxed{\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n.}$

Remarque. IL n'est pas difficile de justifier l'intégrabilité des fonctions f_n : il s'agit d'une application directe du théorème 1.5. De même, l'hypothèse de convergence simple permet le passage à la limite dans l'inégalité : $\forall t \in \mathrm{I}, |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ pour obtenir : $\forall t \in \mathrm{I}, |f(t)| \leqslant \varphi(t)$, ce qui permet d'appliquer de nouveau le théorème 1.5 pour justifier l'intégrabilité de f. En revanche, nous admettrons l'égalité encadrée.

Exemple. Considérons les intégrales de Wallis $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t$. La suite de fonctions $f_n : t \mapsto (\cos t)^n$ converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto 0$ sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Les fonction f_n et f sont continues par morceaux et les fonctions f_n sont dominées par la fonction intégrable $\varphi : t \mapsto 1$, donc le théorème de convergence dominée s'applique : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exemple. Considérons pour $n \geqslant 1$ les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n} \,\mathrm{d}t$. La suite de fonctions $f_n : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^n}$ converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1[\\ \mathrm{e}^{-1} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$. Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et les fonctions f_n sont dominées par la fonction intégrable $\varphi : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$, donc le théorème de convergence dominée s'applique : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n} \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exercice 7. Soit $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h(t)}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).
Lorsque $h(0) \neq 0$ et l'aide du changement de variable $x = nt$, déterminer un équivalent de u_n.

2.2 Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Pour inverser série et intégrale, nous allons là encore être obligés d'admettre le résultat suivant :

Théorème 2.2 — *Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur* I. *On suppose que :*

(i) la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement et la somme $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux ;

(ii) la série $\displaystyle\sum \int_{\mathrm{I}} |f_n|$ est convergente.

Alors la fonction S *est intégrable sur* I, *et* $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} \mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n$.

Exemple. Nous allons calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'un développement en série.

$\forall x \in\,]0,1[,\ \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ donc $\displaystyle\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$.

Notons $f_n : x \mapsto (-1)^{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{n}$. Ces fonctions sont continues par morceaux sur $]0,1[$, $\sum f_n$ converge simplement, et la somme $\mathrm{S} : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est continue.

On calcule $\displaystyle\int_0^1 \left|(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}\right| \mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$; sachant que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge, le théorème d'intégration terme à terme s'applique : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Exemple. Considérons un réel $\alpha > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $f_n : x \mapsto x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-nx}$. Il s'agit de fonctions continues et intégrables sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x > 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-nx} = \frac{x^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^x - 1}$ et (en posant $y = nx$) :

$$\int_0^{+\infty} \left|x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-nx}\right| \mathrm{d}x = \frac{1}{n^\alpha}\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}.$$

La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge dès lors que $\alpha > 1$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^x - 1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ lorsque $\alpha > 1$ (résultat qu'on pouvait obtenir directement), et dans ce cas :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha} = \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha).$$

Par exemple, pour $\alpha = 2$ on obtient : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 8. La *constante de Catalan* est le réel : $\displaystyle K = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Établir l'égalité : $\displaystyle K = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

■ Une démarche alternative

Considérons l'exemple suivant : on cherche à calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ en utilisant la suite de calculs suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \overset{?}{=} \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2.$$

Il nous faut justifier la deuxième égalité de ce calcul.
Essayons d'utiliser le théorème 2.2 en notant $f_n : t \mapsto (-1)^n t^n$ sur $I = [0,1[$. L'hypothèse *(i)* est bien vérifiée, mais pas l'hypothèse *(ii)* car la série $\displaystyle\sum\frac{1}{n+1}$ diverge. Dans ce cas, la solution consiste à utiliser le théorème 2.1 à la suite des restes. On écrit :

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{n=0}^{N}\int_0^1(-1)^n t^n\,\mathrm{d}t + \int_0^1 R_N(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+1} + \int_0^1 R_N(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec } R_N(t) = \sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n t^n.$$

D'après le critère spécial relatif aux séries alternées, $|R_N(t)| \leqslant t^{N+1} \leqslant 1$, ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence dominée : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 R_N(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} R_N(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et ainsi conclure : $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$.

2.3 Intégrales dépendant d'un paramètre

Considérons maintenant une fonction à deux variables $f : J \times I \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ soit continue par morceaux et intégrable sur I. On peut alors définir une application $g : J \to \mathbb{K}$ en posant :

$$\forall x \in J, \quad g(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

La continuité de f vis-à-vis de sa variable x permet-elle d'en déduire celle de g ? La réponse est malheureusement négative. Considérons à cet effet l'application :

$$f : (x,t) \mapsto x\,\mathrm{e}^{-tx} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $x \geqslant 0$, l'application $f(x,\cdot)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc g est bien définie.
Il est aisé de calculer : $g(0) = 0$ et $\forall x > 0$, $g(x) = 1$, aussi g est discontinue en 0 bien que f soit continue vis-à-vis de x.
Pour en déduire la continuité de la fonction g, il va donc être nécessaire d'avoir une hypothèse supplémentaire : ce sera une hypothèse de *domination*.

■ Continuité sous le signe intégral

Théorème 2.3 — *Soit $f : \mathrm{J} \times \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une fonction telle que :*

(i) pour tout $x \in \mathrm{J}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux ;

(ii) pour tout $t \in \mathrm{I}$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur J ;

(iii) il existe une application ϕ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in \mathrm{J} \times \mathrm{I}, \quad |f(x,t)| \leqslant \phi(t) \quad \textit{(hypothèse de domination).}$$

Alors l'application $g : \mathrm{J} \to \mathbb{K}$ définie par : $\forall x \in \mathrm{J}$, $g(x) = \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue en tout point de J.

Exemple. Rappelons que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $]0,+\infty[$. Nous alons prouver qu'elle y est continue.
Commençons par écrire : $\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x)$, et notons $f(x,t) = t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$.
Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$ on a : $\forall t \in]0,1]$, $0 \leqslant t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant t^{a-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \phi_1(t)$. L'application ϕ_1 est intégrable sur $]0,1]$ et domine f, donc Γ_1 est continue sur $[a,+\infty[$, puis par recouvrement sur $]0,+\infty[$.
Soit $b > 0$. Pour tout $x \in]0,b]$ on a : $\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leqslant t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant t^{b-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \phi_2(t)$. L'application ϕ_2 est intégrable sur $[1,+\infty[$ et domine f, donc Γ_2 est continue sur $]0,b]$, puis par recouvrement sur $]0,+\infty[$.
Γ est donc continue sur $]0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions continues.

Remarque. Comme nous venons de le voir sur cet exemple, il est possible de procéder par recouvrement, en prouvant par exemple la continuité sur tout segment inclus dans I.

■ Dérivation sous le signe intégral

Théorème 2.4 — *Soit $f : \mathrm{J} \times \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une application vérifiant les hypothèses suivantes :*

(i) pour tout $x \in \mathrm{J}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;

(ii) pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J ;

(iii) pour tout $x \in \mathrm{J}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(iv) il existe une application ϕ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in \mathrm{J} \times \mathrm{I}, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \phi(t) \quad \textit{(hypothèse de domination).}$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J, et : $\forall x \in \mathrm{J}$, $g'(x) = \int_{\mathrm{I}} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. À l'instar de la continuité, il est fréquent d'avoir à procéder par recouvrement, par exemple en prouvant à l'aide de ce théorème que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment inclus dans J.

Exercice 9. On considère la fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$.

a) Montrer que g est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et solution sur cet intervalle de l'équation différentielle :

$$y - y' = \sqrt{\frac{\pi}{4x}}.$$

• **Extension au cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$**

Enfin, nous admettrons l'extension de ce théorème, à l'instar du théorème équivalent pour les séries de fonctions :

Proposition 2.5 — *Soit $f : \mathrm{J} \times \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une application vérifiant les hypothèses suivantes :*

(i) pour tout $x \in \mathrm{J}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;

(ii) pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;

(iii) pour tout $x \in \mathrm{J}$ et tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;

(iv) pour tout $x \in \mathrm{J}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(v) il existe une application ϕ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in \mathrm{J} \times \mathrm{I}, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \phi(t) \quad \textit{(hypothèse de domination).}$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J, et : $\forall x \in \mathrm{J}$, $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $g^{(i)}(x) = \displaystyle\int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\,dt$.

■ Utiliser Python pour représenter une intégrale à paramètre

À titre d'exemple, définissons la fonction $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$ en Python. On utilise la fonction `quad` du module `scipy.integrate`, qui autorise des bornes infinies :

```python
from scipy.integrate import quad

def gamma(x):
    def f(t):
        return t**(x-1) * np.exp(-t)
    return quad(f, 0, np.inf)[0]
```

Une fois définie, elle peut être utilisée à l'instar des fonctions usuelles. Par exemple, pour en visualiser le graphe, on utilisera le script :

```python
X = np.linspace(0.05, 5, 256)
Y = [gamma(x) for x in X]
plt.grid()
plt.plot(X, Y)
```

3. Exercices

Intégrales généralisées

Exercice 10 Déterminer sans recourir à la recherche de primitives la convergence ou non des intégrales :

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} \qquad \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,dt \qquad \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}\,dt$$

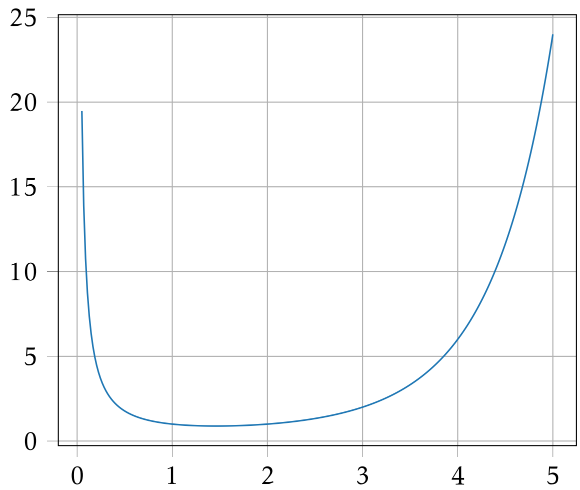


Figure 3 – Le graphe de la fonction Γ.

Exercice 11 Justifier l'existence puis calculer les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)} \qquad \int_0^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 12 Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que les intégrales suivantes soient convergentes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 13 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, telle que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f''(t)^2\,\mathrm{d}t$ soient convergentes.
Montrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz qu'il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t$.
En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ (on pourra raisonner par l'absurde).

Exercice 14 À l'aide d'une intégration par parties, prouver que l'intégrale de Fresnel $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 15

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge puis calculer sa valeur en utilisant le changement de variable $u = 1/t$.

b) Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}$.

Exercice 16 Justifier l'existence de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et de $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$, puis montrer que $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.
Calculer $\mathrm{I}+\mathrm{J}$ en utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques, et en déduire la valeur de I.

Exercice 17 Soient α et β deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de l'intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t}\,\mathrm{d}t$.
Soit $x > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$, et en déduire la valeur de I.

Exercice 18

a) Justifier l'existence de : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Pour $x > 0$, on pose $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. À l'aide de la formule : $\sin(3t) = 3\sin t - 4\sin^3 t$, montrer que : $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{3\sin t}{4t^2}\,\mathrm{d}t$, et en déduire la valeur de I.

Exercice 19 Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone et intégrable sur $[0,1[$, et $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Convergence dominée

Exercice 20 Déterminer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n + \mathrm{e}^t}$.

Exercice 21 Déterminer un équivalent de $u_n = \displaystyle\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 22 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Déterminer la limite de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

b) On suppose de plus que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer que $\mathrm{I}_n = f(0) + \displaystyle\int_0^1 \left(1 - u^{\frac{1}{n}}\right) f'(u)\,\mathrm{d}u$.

c) En déduire que $\mathrm{I}_n = f(0) - \displaystyle\frac{1}{n}\int_0^1 \ln(u) f'(u)\,\mathrm{d}u + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 23 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} n f(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \qquad \text{puis} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^n n f(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

Pour la seconde intégrale, vous pourrez considérer la suite de fonctions (f_n) définie par : $f_n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$.

Exercice 24 Justifier l'existence de l'intégrale $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$, puis montrer que $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$.
Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$, et en déduire que $\mathrm{K} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 25 Soit (λ_n) une suite croissante de réels strictement positifs, divergeant vers $+\infty$. On considère la fonction suivante :

$$\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}.$$

Quel est l'ensemble de définition de S ? Y-est-elle continue ?

Dans un premier temps, on suppose la série $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ convergente. À l'aide du théorème d'interversion somme/intégrale, montrer que la fonction S est intégrable sur $]0,+\infty[$, et calculer $\int_0^{+\infty} S(t)\,dt$.

On ne suppose désormais plus que la série $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ converge. En considérant la suite des sommes partielles et à l'aide cette fois-ci du théorème de convergence dominée, montrer que le résultat précédent subsiste.

Intégrales à paramètre

Exercice 26 Montrer la continuité de l'application définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{x+t}\,dt$ puis préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

Exercice 27 Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\,dt$.

a) Justifier que f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $f'(x)$, et en déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

Exercice 28 **Intégrale de Gauss**

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,dt$.

a) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. f est-elle continue sur cet intervalle ? Dérivable ?

b) On pose $h(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Exprimer f à l'aide de h et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 29 On pose quand c'est possible $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$.

a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f. Est-elle continue sur $\mathcal{D}$? De classe $\mathscr{C}^1$?

b) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

c) Donner un équivalent de f en $(-1)^+$.