

Chapitre XI

Calcul différentiel

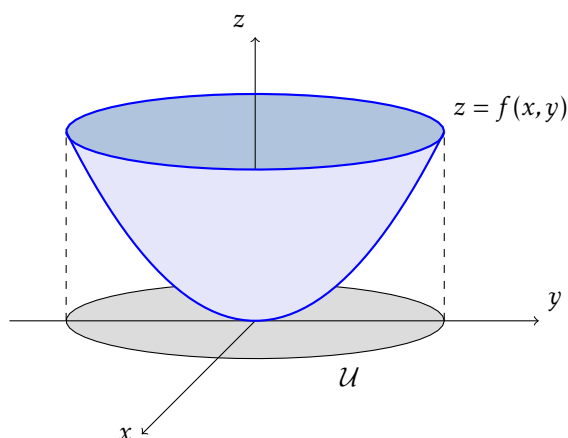
Jusqu'à présent, nous nous sommes cantonnés à l'étude de fonctions d'une *variable*, d'abord à valeurs réelles ou complexes en première année, puis à valeurs vectorielles (dans \mathbb{R}^n) en seconde année. Ces fonctions étaient systématiquement définies sur un intervalle I de \mathbb{R} . Nous allons maintenant nous intéresser aux fonctions de *plusieurs variables*, c'est à dire définies sur une partie \mathcal{U} de \mathbb{R}^p , à valeurs dans \mathbb{R}^n :

$$f : \left(\begin{array}{l} \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, \dots, x_p) \longmapsto f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_n(x_1, \dots, x_p)) \end{array} \right)$$

Dans ce cours, nous aurons l'occasion, comme pour les fonctions vectorielles, de montrer que l'étude d'une telle fonction se ramène à celle de ses fonctions coordonnées f_1, \dots, f_n et ainsi nous ramener à l'étude des fonctions à valeurs réelles (autrement dit prendre $n = 1$). Pour des raisons pratiques, nos exemples se cantonneront le plus souvent à des fonctions à deux ou trois variables ($p = 2$ ou 3).

Ainsi, lorsque l'on a $p = 2$ et $n = 1$, le graphe $z = f(x, y)$ d'une telle fonction est une nappe paramétrée que l'on peut visualiser et ainsi fournir un support à une interprétation géométrique :

Exemple. $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, et $f : \left(\begin{array}{l} \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 \end{array} \right)$



D'un point de vue historique, on peut noter que la notion de fonction à plusieurs variables apparaît très tôt en physique, où l'on étudie souvent des quantités dépendants de plusieurs paramètres. Citons par exemple :

- en mécanique des fluides, la *pression* p est un champ¹ scalaire qui associe à un point du fluide la pression en ce point ; mathématiquement, cela correspond à une application d'une partie \mathcal{U} de \mathbb{R}^3 (ou de \mathbb{R}^4 , si on tient compte du temps) dans \mathbb{R} :

$$p : \left(\begin{array}{l} \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \\ M = (x, y, z) \longmapsto p(M) \end{array} \right)$$

- en électromagnétisme, la *densité de courant* \vec{j} est un champ vectoriel qui associe à tout point de l'espace considéré un vecteur qui décrit le courant électrique qui circule à l'échelle locale ; mathématiquement, cela correspond à une application d'une partie \mathcal{U} de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 :

$$\vec{j} : \left(\begin{array}{l} \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ M = (x, y, z) \longmapsto \vec{j}(M) \end{array} \right)$$

Mais avant de débiter l'étude du concept de différentiabilité, nous allons revenir un instant sur les notions de limite et de continuité, déjà abordées dans le chapitre consacré aux espaces vectoriels normés.

1. en mathématiques, un champ est une application qui associe aux points de l'espace une valeur, scalaire ou vectorielle.

1. Calcul différentiel

Dans cette section, E et F désigneront deux \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimensions finies, la norme étant notée $\|\cdot\|$ indépendamment de l'espace, mais le plus souvent nous auront $E = \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{R}^3 et $F = \mathbb{R}$.

\mathcal{U} désignera une partie de E (le plus souvent un ouvert), et $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une fonction à plusieurs variables.

1.1 Étude locale d'une application

Dans le chapitre consacré aux espaces vectoriels normés nous avons donné la définition de la limite de f en un point adhérent à \mathcal{U} :

$f(x)$ admet $\ell \in F$ pour limite lorsque x tend vers a lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in \mathcal{U}, \quad \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \epsilon$$

En outre, lorsque $a \in \mathcal{U}$ et $\ell = f(a)$, f est dite continue en a .

Observons sur deux exemples comment se traduit cette définition dans le cadre des fonctions à plusieurs variables.

Exemple. Considérons la fonction $f_1 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, et utilisons la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^2 : $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Sachant que $|x| \leq \|(x, y)\|$ et $|y| \leq \|(x, y)\|$, nous pouvons affirmer que $|f_1(x, y)| \leq \|(x, y)\|$, ce qui implique : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y) = 0$.

Exemple. Considérons la fonction $f_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_2(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

Supposons que cette fonction possède une limite ℓ en $(0,0)$. Les théorèmes de composition des limites impliquent que pour toute fonction vectorielle $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ pour laquelle $\lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = (0,0)$ nous avons : $\lim_{t \rightarrow 0} f_2 \circ \phi(t) = \ell$.

Or $\lim_{t \rightarrow 0} f_2(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t^2 + 1} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} f_2(t, t^2) = \frac{1}{2}$. Ainsi f_2 ne possède pas de limite en $(0,0)$.

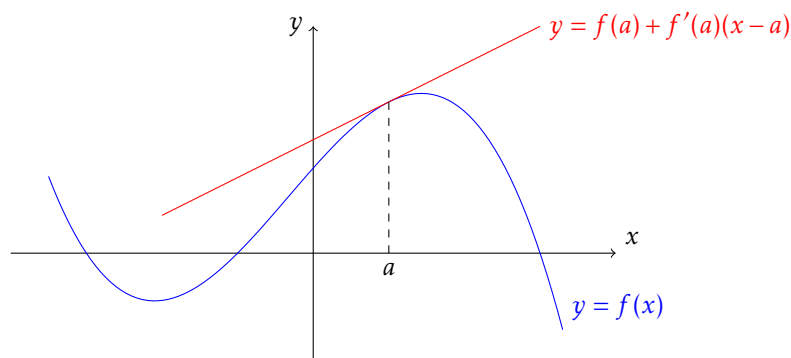
EXERCICE 1

Déterminer si les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ont une limite finie en $(0,0)$:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{|x + y|}{x^2 + y^2}, \quad h(x, y) = (x + y) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

1.2 Applications différentiables

Pour comprendre comment nous allons généraliser la notion de dérivée aux fonctions à plusieurs variables, observons l'interprétation géométrique qu'on peut faire de la dérivée en $a \in I$ d'une fonction à une variable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.



Au voisinage de a , le graphe de f est approché par une droite, sa tangente. Autrement dit, f est localement approchée par l'application affine $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$, ce qui se traduit par le développement limité suivant :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a).$$

qu'on peut écrire de façon équivalente :

$$f(a + h) \underset{0}{=} f(a) + f'(a)h + o(h).$$

Cette approximation affine est formée d'une constante $f(a)$ et d'une application linéaire $h \mapsto f'(a)h$. Ceci nous conduit à adopter la définition suivante :

DÉFINITION. — Soient E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimensions finies, \mathcal{U} un ouvert de E et $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une application.

On dira que f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ lorsqu'il existe une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a + h) \underset{0_E}{=} f(a) + u(h) + o(\|h\|).$$

Dans ce cas, l'application linéaire u est appelée la *différentielle* de f en a , et sera notée $df(a)$. Ainsi, on écrira :

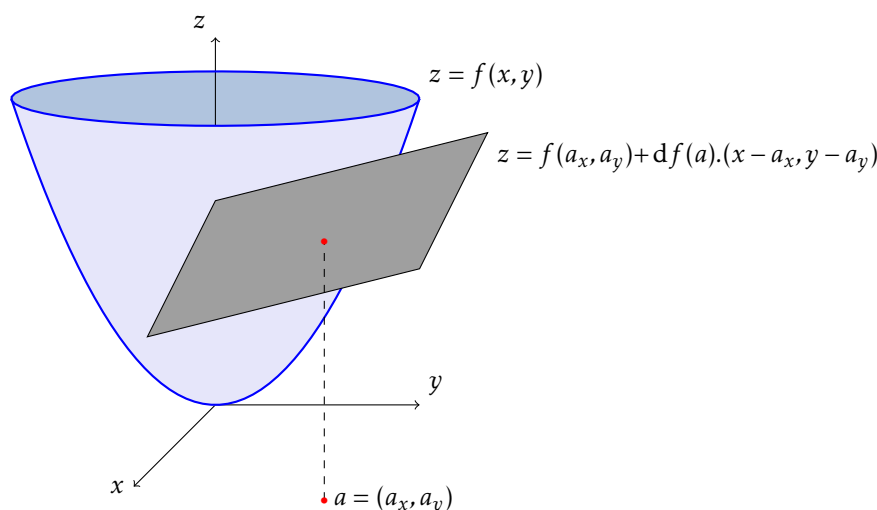
$$\boxed{f(a + h) \underset{0_E}{=} f(a) + df(a).h + o(\|h\|).} \quad \text{ou encore :} \quad \boxed{f(x) \underset{a}{=} f(a) + df(a).(x - a) + o(\|x - a\|)}$$

Notons que la différentiabilité de f en a entraîne *a fortiori* la continuité de f en a , puisqu'une application linéaire est continue (en dimension finie).

Exemple. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$, les applications affines prennent la forme suivante :

$$\tilde{u} : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \mapsto & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \alpha + \beta x + \gamma y \end{pmatrix}$$

et le graphe de cette application affine est le plan affine d'équation $z = \alpha + \beta x + \gamma y$. Autrement dit, la nappe d'équation $z = f(x, y)$ est localement approchée par un plan.



EXERCICE 2

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(M) = M^2$. Montrer que f est différentiable en tout point $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et déterminer l'application linéaire $df(A)$.

Remarque. Lorsque f est une application linéaire, l'égalité $f(x) = f(a) + f(x - a)$ montre que sa différentielle en a est égale à elle-même : pour tout $a \in E$, $df(a) = f$.

différence entre dérivée et différentielle

Dans le cas des fonctions numériques, la dérivée de f en a est le réel $f'(a)$, alors que la différentielle de f en a est l'application linéaire $x \mapsto f'(a)x$. En effet, les applications linéaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} s'écrivent de manière unique sous la forme : $x \mapsto \lambda x$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On peut se rapprocher encore de la notion de dérivée lorsque $F = \mathbb{R}$: dans ce cas, la différentielle $df(a)$ de f en a est une application linéaire de E dans \mathbb{R} , c'est à dire une *forme linéaire*. Or lorsque E est un espace euclidien, nous avons vu que les formes linéaires sur E s'écrivent de manière unique sous la forme $x \mapsto \langle \ell | x \rangle$, avec $\ell \in E$. Cela conduit à la définition :

DÉFINITION. — Lorsque $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in E$, il existe un unique vecteur de E , noté $\nabla f(a)$ tel que :

$$\forall h \in E, \quad df(a).h = \langle \nabla f(a) | h \rangle.$$

Le vecteur $\nabla f(a)$ est appelé le gradient de f en a .

EXERCICE 3

Soit E un espace euclidien, et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(x) = \langle x | x \rangle$. Montrer que f est différentiable en tout $a \in E$, et déterminer le vecteur $\nabla f(a)$.

1.3 Dérivées partielles

Nous allons maintenant nous attacher à voir comment calculer une différentielle (ou un gradient) dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}$. L'idée que nous allons suivre est d'essayer, autant que faire se peut, de se ramener à des calculs de dérivées de fonctions d'une seule variable.

Sachant que f est définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^p , l'application partielle $t \mapsto f(a + th)$ est, quel que soit le vecteur $h \in \mathbb{R}^p$, une fonction vectorielle définie au voisinage de 0. En particulier, lorsque $h = e_k$ est le k^{e} vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^p , cette application prend la forme suivante :

$$t \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_p).$$

Lorsque cette application est dérivable en 0, on note $\partial_k f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ sa dérivée en 0, quantité qu'on appelle la k^{e} dérivée partielle d'ordre 1 de f en a . Autrement dit :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \partial_k f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + t, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_p)}{t}.$$

PROPOSITION 1.1 — Lorsque f est différentiable en a , f admet en a des dérivées partielles d'ordre 1 et pour tout

$$h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p, \quad df(a).h = \sum_{k=1}^p \partial_k f(a) h_k. \quad \text{Autrement dit,} \quad \nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_p f(a)).$$

La réciproque de ce résultat est fautive : une fonction peut posséder des dérivées partielles en a sans être différentiable en ce point. Cependant, en renforçant un peu les hypothèses on dispose du résultat suivant, avec lequel nous allons maintenant justifier l'existence de la différentielle :

THÉORÈME 1.2 — Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^p , et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

- (i) f possède pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et en tout point a de \mathcal{U} une dérivée partielle $\partial_k f(a)$;
- (ii) pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, l'application $\partial_k f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur \mathcal{U} .

Alors f est différentiable en tout point a de \mathcal{U} .

Une application f vérifiant ces hypothèses sera dorénavant dite de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} .

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(x, y) = x^2y$. f admet en tout point (x, y) des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$ à l'évidence continues, donc f est de classe \mathcal{C}^1 et $\nabla f(x, y) = 2xy\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2$.

La différentielle s'écrit donc $df(x, y) : (u, v) \mapsto 2xyu + x^2v$.

EXERCICE 4

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?

1.4 Règle de la chaîne

Considérons une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , I un intervalle et $x_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq p$ des fonctions elles aussi de classe \mathcal{C}^1 telles que pour tout $t \in I$, $(x_1(t), \dots, x_p(t)) \in \mathcal{U}$. On peut dès lors définir la fonction $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ par $\phi(t) = f(x_1(t), \dots, x_p(t))$.

Le résultat suivant, appelé *règle de la dérivation en chaîne*, ou plus simplement *règle de la chaîne*, donne la règle de dérivation d'une telle fonction.

THÉORÈME 1.3 (règle de la chaîne) — Si f et toutes les fonctions x_1, \dots, x_p sont de classe \mathcal{C}^1 , il en est de même de la fonction ϕ , et

$$\forall t \in I, \quad \phi'(t) = \sum_{k=1}^p x'_k(t) \partial_k f(x_1(t), \dots, x_p(t)) = \sum_{k=1}^p x'_k(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1(t), \dots, x_p(t)).$$

Exemple. En dynamique des fluides, la *description eulérienne* d'un fluide consiste à se placer en un point fixe et à observer les modifications des propriétés du fluide qui défile en ce point. Une telle propriété sera donc définie par une fonction $E(t, x, y, z)$ à 4 variables indépendantes.

En revanche, la *description lagrangienne* consiste à suivre une particule dans son mouvement. Une telle propriété sera définie par la fonction $e(t) = E(t, x(t), y(t), g(t))$, où $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ décrit la trajectoire de la particule au cours du temps. On a donc :

$$e'(t) = \frac{\partial E}{\partial t}(t, x(t), y(t), g(t)) + x'(t) \frac{\partial E}{\partial x}(t, x(t), y(t), g(t)) + y'(t) \frac{\partial E}{\partial y}(t, x(t), y(t), g(t)) + z'(t) \frac{\partial E}{\partial z}(t, x(t), y(t), g(t))$$

Un physicien aura tendance à noter de la même façon la propriété E de la description eulérienne et la propriété e de la description lagrangienne, ce qui l'amènera à écrire :

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + x' \frac{\partial E}{\partial x} + y' \frac{\partial E}{\partial y} + z' \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial E}{\partial t} + \langle v | \nabla E \rangle$$

où v désigne la vitesse de la particule et D la dérivation au sens lagrangien.

EXERCICE 5

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f , et en déduire l'expression du gradient en coordonnées polaires.

PROPOSITION 1.4 — Soit \mathcal{U} un ouvert convexe de \mathbb{R}^p , et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Alors f est constante sur \mathcal{U} si et seulement si pour tout $a \in \mathcal{U}$, $df(a) = 0$, autrement dit si et seulement si les fonctions $\partial_1 f, \dots, \partial_p f$ sont nulles sur \mathcal{U} .

1.5 Extremums locaux

Dans cette section, nous considérons un domaine (non nécessairement ouvert) \mathcal{U} de \mathbb{R}^p ainsi qu'une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$.

DÉFINITION. — On dit que f présente en un point $a \in \mathcal{U}$ un maximum local lorsqu'il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, r) \cap \mathcal{U}$, $f(x) \leq f(a)$.

On dit que f présente en $a \in \mathcal{U}$ un maximum global lorsque pour tout $x \in \mathcal{U}$, $f(x) \leq f(a)$.

On définit de la même façon les notions de minimum local et de minimum global.

Remarque. De cette définition il résulte immédiatement que tout extremum global est un extremum local, la réciproque n'étant bien évidemment pas vraie.

THÉORÈME 1.5 — Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , et $a \in \mathcal{U}$ un point en lequel f présente un extremum local. Alors : $df(a) = 0$ (la forme linéaire nulle).

Remarque. La condition $df(a) = 0$, qui peut s'écrire $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{E}}$, est donc une condition *nécessaire* mais non *suffisante* pour que f présente un extremum local en a dans l'ouvert \mathcal{U} .

Un point a en lequel $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{E}}$ est appelé un *point critique* de f .

EXERCICE 6

Déterminer les points critiques de la fonction $f : (x, y) \mapsto xe^y + ye^x$ sur \mathbb{R}^2 , puis déterminer s'il s'agit d'extremum locaux ou pas.

■ Recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de \mathbb{R}^p

Considérons maintenant une partie \mathcal{K} fermée et bornée de \mathbb{R}^p et une application $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, sur \mathcal{K} , de classe \mathcal{C}^1 sur $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$.

Dans le chapitre consacré aux espaces vectoriels normés, nous avons admis le résultat suivant, qui va nous être de nouveau utile :

Rappel. Si \mathcal{K} est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^p et $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f est bornée et atteint ses bornes sur \mathcal{K} .

Ce résultat assure l'existence d'un minimum et d'un maximum global sur \mathcal{K} . Ces deux extremums se trouvent ou bien sur la frontière $\text{Fr}(\mathcal{K})$ de \mathcal{K} , ou bien dans l'intérieur $\overset{\circ}{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \setminus \text{Fr}(\mathcal{K})$ de \mathcal{K} . En d'autres termes, les extremums globaux sont à chercher :

- sur la frontière de \mathcal{K} ;
- et parmi les points critiques de l'intérieur de \mathcal{K} .

EXERCICE 7

Soit $\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, et $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy(1 - x - y)$. Déterminer la valeur maximale prise par la fonction f .

1.6 Dérivées partielles d'ordre deux

Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^p , et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Les applications $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont des applications définies et continues de \mathcal{U} dans \mathbb{R} et à ce titre peuvent être elles-mêmes de classe \mathcal{C}^1 . Lorsque c'est le cas, on note $\partial_j \partial_i f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ la dérivée partielle par rapport à la j^{e} variable de $\partial_i f$.

Remarque. Dans le cas particulier où $i = j$ on utilisera plutôt la notation $\partial_i^2 f$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

DÉFINITION. — Une application $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe \mathcal{C}^2 lorsqu'elle est de classe \mathcal{C}^1 et lorsque pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\partial_i f$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} .

A priori, l'expression $\partial_j \partial_i f$ signifie que l'on dérive d'abord par rapport à x_i , puis par rapport à x_j . cependant, le théorème suivant, que nous admettrons, montre qu'il n'en est rien dans le cas d'une fonction de classe \mathcal{C}^2 .

THÉORÈME 1.6 (Théorème de Schwarz) — Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Alors pour $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $\partial_j \partial_i f = \partial_i \partial_j f$.

EXERCICE 8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

a. Calculer les dérivées partielles secondes de g en fonction de celles de f .

On appelle *laplacien* de f la quantité : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

b. Dédurre des calculs précédents l'expression du laplacien en coordonnées polaires (c'est à dire en fonction des dérivées de g).

■ Équations aux dérivées partielles

En sciences physiques il est fréquent d'avoir à résoudre une équation mêlant les dérivées partielles d'ordre 1 ou 2 d'une même fonction. Le phénomène de propagation des ondes peut par exemple être modélisé par l'équation de d'Alembert $\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$. En dimension 1, cette équation s'écrit $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = 0$.

Il n'y a pas de méthode générale de résolution, mais celle-ci passe le plus souvent par l'utilisation d'un changement de variable.

On appelle *changement de variable de classe \mathcal{C}^k* une application bijective $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ entre deux ouverts \mathcal{U} et \mathcal{V} de \mathbb{R}^p telle que ϕ et ϕ^{-1} soient toutes deux de classe \mathcal{C}^k . Nous nous restreindrons à deux types de changement de variable : les changements de variables affines et le changement de variable en coordonnées polaires.

Un changement de variable *affine* consiste simplement à poser $\begin{cases} u = ax + by + e \\ v = cx + dy + f \end{cases}$ qui se traduit matriciellement par $Y = AX + B$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. Pour qu'il soit bijectif, il faut et il suffit que $\det A \neq 0$, et il s'agit alors d'un changement de variable de classe \mathcal{C}^∞ .

Par exemple, pour résoudre l'équation de propagation en dimension 1, on posera $\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$ et $g(u, v) = f(x, t)$.

Cette dernière équation introduit une nouvelle fonction inconnue g , et peut être comprise de deux façons :

- $g(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$ (pour définir g à partir de f);
- $f(x, t) = g(x+ct, x-ct)$ (pour retrouver f une fois déterminé g).

On calcule successivement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) &= \frac{\partial g}{\partial u}(x+ct, x-ct) + \frac{\partial g}{\partial v}(x+ct, x-ct) & \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) &= c \frac{\partial g}{\partial u}(x+ct, x-ct) - c \frac{\partial g}{\partial v}(x+ct, x-ct) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) - 2c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) + c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) \end{aligned}$$

et alors : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = 0 \iff 4 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$.

Cette équation est maintenant aisément résoluble : la fonction $\frac{\partial g}{\partial v}$ est indépendante de u donc ne dépend que de v . La fonction g s'écrit donc sous la forme $g(u, v) = \phi(u) + \psi(v)$, où ϕ et ψ sont deux fonctions quelconques de classe \mathcal{C}^2 . Il reste à revenir à f en concluant que $f(x, t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$.

Le changement de variables en coordonnées polaires

En toute rigueur, pour que le changement de variable $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ soit bijectif et de classe \mathcal{C}^∞ ainsi que sa réciproque, il est nécessaire d'imposer $r \in]0, +\infty[$ et $\theta \in]\alpha, \alpha + 2\pi[$, ce qui restreint (x, y) à $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_\alpha$, où \mathcal{D}_α est la demi-droite fermée issue de l'origine et d'angle α par rapport à l'axe Ox .

Une fois ceci précisé, l'équation $f(x, y) = g(r, \theta)$ peut s'écrire $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. En revanche, on observera que faute d'une expression simple de θ en fonction de x et de y , il sera plus difficile d'exprimer $f(x, y)$ en fonction de g , x et y , aussi va-t-on dans ce cas calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Par exemple, l'équation aux dérivées partielles $y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ s'écrit $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = 0$ en coordonnées polaires, soit $g(r, \theta) = \phi(r)$ où ϕ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , et $f(x, y) = \phi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

De même, l'équation $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ s'écrit $\frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$ en coordonnées polaires, soit $g(r, \theta) = \psi(\theta)$ où ψ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Ici, faute d'une expression convenable pour la fonction θ , on se contentera de conclure que $f(x, y) = \psi(\theta(x, y))$.

2. Applications géométriques

2.1 Courbes du plan

Définir une courbe du plan se fait généralement par l'intermédiaire d'une paramétrisation $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ou par le biais d'une équation implicite $f(x, y) = \lambda$, où $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda = 0$.

Dans le premier cas, nous avons vu que si $(a, b) = (x(t_0), y(t_0))$ est un point régulier de la courbe, la tangente à cette dernière est dirigée par le vecteur $x'(t_0)e_1 + y'(t_0)e_2$.

Dans le second cas, nous allons admettre que si f est de classe \mathcal{C}^1 alors en tout point (a, b) de cette courbe où la différentielle $df(a, b)$ ne s'annule pas, la courbe d'équation $f(x, y) = \lambda$ possède une paramétrisation $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ au voisinage du point $(a, b) = (x(t_0), y(t_0))$.

Au voisinage de t_0 nous avons donc $f(x(t), y(t)) = \lambda$ et en dérivant : $x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = 0$.

Prise pour $t = t_0$ cette équation s'écrit : $x'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + y'(t_0) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$. Nous avons démontré le

THÉORÈME 2.1 — Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 , et $\lambda \in \mathbb{R}$. En un point (a, b) de la courbe d'équation $f(x, y) = \lambda$ en lequel $df(a, b)$ n'est pas nul, le vecteur $\nabla f(a, b)$ est un vecteur normal à la tangente. L'équation de cette dernière s'écrit donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0.$$

Remarque. En sciences physiques, les courbes d'équation $f(x, y) = \lambda$ sont appelées des *lignes de niveau*, et nous venons de démontrer qu'en un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau, et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .

Exemple. L'ellipse \mathcal{E} d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet en tout point $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ une tangente d'équation

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0.$$

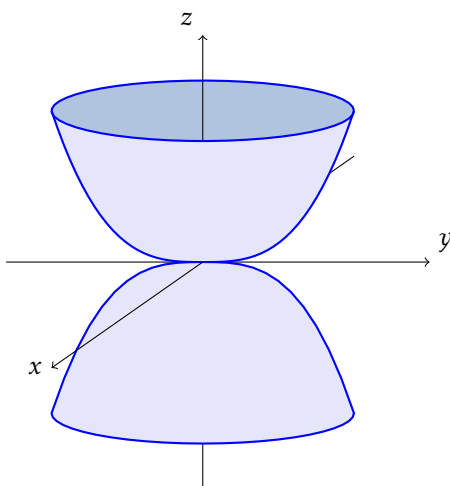
2.2 Surfaces de l'espace

Définition paramétrique d'une surface

Une surface peut être définie par la donnée de trois fonctions $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et $z : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions définies sur une partie \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 ; le support de cette surface est alors l'ensemble :

$$\{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \mid (u, v) \in \mathcal{U}\}.$$

Exemple.
$$\begin{cases} x = u \cos(v) \\ y = u \sin(v) \\ z = u^3 \end{cases} \quad \text{pour } u \in [-1, 1] \text{ et } v \in [0, 2\pi].$$



Considérons la fonction $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $f(u, v) = x(u, v)\vec{e}_1 + y(u, v)\vec{e}_2 + z(u, v)\vec{e}_3$; lorsque x , y et z sont de classe \mathcal{C}^1 , il en est de même de f , et la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(u+h, v+k) = f(u, v) + h \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + k \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) + o(\|(h, k)\|)$$

avec
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\vec{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\vec{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\vec{e}_3 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\vec{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\vec{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\vec{e}_3 \end{cases}$$

En général, les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ sont linéairement indépendants; on dit alors que le point correspondant est *régulier*. Dans ce cas, l'ensemble des points paramétrés par :

$$(h, k) \mapsto f(u, v) + h \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + k \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \quad \text{avec } (h, k) \in \mathbb{R}^2$$

est un plan, appelé *plan tangent* à la surface au point de paramétrage (u, v) .

Exemple. Dans l'exemple précédent, $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 3u^2 \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$.

On calcule : $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} -3u^3 \cos v \\ -3u^3 \sin v \\ u \end{pmatrix}$ donc lorsque $u \neq 0$, le point est régulier.

Remarque. Le vecteur $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ est un vecteur normal au plan tangent.

Nappes paramétrées

Dans le cas particulier où $x(u, v) = u$ et $y(u, v) = v$ on obtient une paramétrisation de la forme : $z = \phi(x, y)$; la surface est alors appelée une *nappe* paramétrée.

Nous avons $f(x, y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + \phi(x, y)\vec{e}_3$ donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

tous les points d'une nappe paramétrée sont réguliers. En outre, le plan tangent au point de coordonnées $(x_0, y_0, \phi(x_0, y_0))$ a pour équation :

$$\begin{aligned} z &= \phi(x_0, y_0) + d\phi(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) \\ \iff z &= \phi(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Surface définie implicitement

Certaines surfaces sont définies implicitement par une ligne de niveau du type : $F(x, y, z) = \lambda$.

À l'instar des courbes définies implicitement dans le plan, nous admettrons qu'en tout point (a, b, c) de la surface où il ne s'annule pas, le vecteur $\nabla F(a, b, c)$ est un vecteur normal au plan tangent. Ce dernier aura donc pour équation :

$$(x - a) \frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c) + (y - b) \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) + (z - c) \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) = 0.$$

EXERCICE 9

On considère la surface d'équation : $xy = z^3$. Trouver les plans tangents qui contiennent la droite d'équations :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$$