Chapitre X
Équations différentielles

En première année ont été étudiées les équations différentielles linéaires du premier ordre :

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où a et b sont deux fonstions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans ce cas, l'inconnue y est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs elle aussi dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cette année nous allons généraliser cette approche en étudiant les systèmes différentiels de la forme :

$$\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t)$$

où A et B sont des fonctions vectorielles. Plus précisément, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathrm{A} : \mathrm{I} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} : \mathrm{I} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ seront supposées continues, et l'inconnue $\mathrm{X} : \mathrm{I} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Dans ce chapitre nous supposerons importés les modules et fonction suivants :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
```

1. Équations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 Équations linéaires scalaires

Définition. — *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, *et* $a, b, c : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ *trois fonctions continues à valeurs réelles ou complexes. On appelle* équation différentielle linéaire du premier ordre *toute équation différentielle de la forme :*

$$a(t)x' + b(t)x = c(t).$$

Remarque. Lorsque a ne s'annule pas sur I, cette équation différentielle peut être mise sous forme *résolue* :

$$x' = u(t)x + v(t) \tag{E}$$

en posant $u = -b/a$ et $v = c/a$.
Quitte à restreindre I, on supposera désormais cette condition satisfaite.

On appelle *équation homogène* associée à l'équation différentielle $x' = u(t)x + v(t)$ l'équation :

$$x' = u(t)x \tag{H}$$

■ Résolution de l'équation homogène

Le théorème fondamental de l'analyse assure l'existence d'une primitive U de la fonction u sur l'intervalle I [1]. Alors x est solution sur I de l'équation homogène si et seulement si :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad x'(t) - u(t)x(t) = 0 \iff \big(x'(t) - \mathrm{U}'(t)x(t)\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{U}(t)} = 0 \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{U}(t)}\Big) = 0.$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc les applications définies sur I par : $t \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\mathrm{U}(t)}$; elles forment une droite vectorielle.

1. On peut par exemple définir U en fixant $t_0 \in \mathrm{I}$ et en posant $\mathrm{U} : t \longmapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} u(s)\,\mathrm{d}s$.

■ Résolution de l'équation générale

x est solution de l'équation générale si et seulement si :

$$\forall t \in \mathrm{I},\quad x'(t)-u(t)x(t)=v(t) \iff \Big(x'(t)-\mathrm{U}'(t)x(t)\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{U}(t)}=v(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{U}(t)} \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{U}(t)}\Big)=v(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{U}(t)}.$$

Considérons une primitive V de l'application $t \longmapsto v(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{U}(t)}$ sur l'intervalle I [2]. Les solutions de l'équation générale sont alors les applications définies sur I par : $t \longmapsto \big(\mathrm{V}(t)+\lambda\big)\mathrm{e}^{\mathrm{U}(t)}$.

Proposition 1.1 — *Si x_0 est une solution particulière de l'équation générale, les autres solutions s'obtiennent en lui ajoutant une solution quelconque de l'équation homogène associée.*

Remarque. La méthode dite de « variation de la constante » consiste, une fois résolue l'équation homogène, à effectuer le changement de fonction inconnue $x=y\,\mathrm{e}^{\mathrm{U}(t)}$. On a $x'=\big(y'+u(t)y\big)\mathrm{e}^{\mathrm{U}(t)}=y'\,\mathrm{e}^{\mathrm{U}(t)}+u(t)x$, et l'équation différentielle devient :

$$x'=u(t)x+v(t) \iff y'=v(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{U}(t)} \iff y=\mathrm{V}+C^{te}.$$

Exemple. Résolution de $tx'-2x=t$.
On résout cette équation sous forme résolue en se plaçant sur l'un des deux intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$. On peut alors écrire $x'=\dfrac{2}{t}x+1$. Nous avons donc $u(t)=\dfrac{2}{t}$ et $v(t)=1$.
On choisit pour primitive de $u(t)$ la fonction $\mathrm{U}(t)=\ln(t^2)$; les solutions de l'équation homogène associée s'écrivent donc : $t\longmapsto \lambda t^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
On pose alors $x=t^2y$; alors $tx'-2x=t \iff y'=\dfrac{1}{t^2} \iff y=-\dfrac{1}{t}+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et donc $x=-t+\lambda t^2$.
Nous avons donc deux types de solutions qui diffèrent par leur intervalle de définition :

$$\phi_\lambda : \begin{pmatrix}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -t+\lambda t^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \psi_\mu : \begin{pmatrix}]-\infty,0[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -t+\mu t^2 \end{pmatrix}.$$

```python
T1 = np.linspace(-3, 0, 128)
T2 = np.linspace(0, 3, 128)

for k in (-2, -1, -.5, 0, .5, 1, 2):
    X1 = [ -t + k * t**2 for t in T1]
    plt.plot(T1, X1, 'b')
    X2 = [ -t + k * t**2 for t in T2]
    plt.plot(T2, X2, 'r')

plt.grid()
plt.show()
```

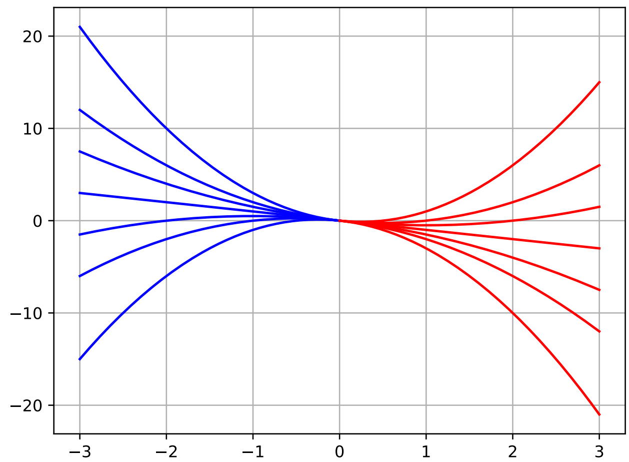


Figure 1 – Tracé de quelques solutions de l'équation différentielle $tx'-2x=t$.

On peut observer sur la figure 1 que ces solutions permettent de construire des solutions de l'équation initiale définies sur $\mathbb{R}$; il s'agit des fonctions :

$$\theta_{\lambda,\mu} : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} -t+\mu t^2 & \text{si } t\leqslant 0 \\ -t+\lambda t^2 & \text{si } t\geqslant 0 \end{cases} \end{pmatrix}$$

2. On peut éventuellement définir V comme suit : $\mathrm{V} : t \longmapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{U}(s)}\,\mathrm{d}s$.

Exercice 1

Déterminer les solutions sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$ de l'équation différentielle $(1-t)x'-x=t$. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Le problème de Cauchy

On appelle *problème de Cauchy* la donnée d'une équation différentielle linéaire (du premier ordre) mise sous forme résolue : $x'=u(t)x+v(t)$ et d'une condition initiale $x(t_0)=x_0$.
Une solution au problème de Cauchy est une solution de l'équation différentielle vérifiant cette condition initiale.

La connaissance des solutions générales d'une équation différentielle linéaire nous permet d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 1.2 — *L'équation différentielle $x'=u(t)x+v(t)$ admet en tout point $(t_0,x_0)\in \mathrm{I}\times\mathbb{K}$ une unique solution au problème de Cauchy.*

Remarque. Dans l'exemple précédent, on peut observer qu'il y a bien unicité de la solution d'un problème de Cauchy sur l'intervalle $]-\infty,0[$ ou sur l'intervalle $]0,+\infty[$, mais pas sur $\mathbb{R}$. En effet, les conditions de Cauchy ne sont pas réunies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 2

Soient u et v deux fonctions continues et 1-périodiques, et x une solution de l'équation différentielle $x'=u(t)x+v(t)$. Montrer que la fonction $\widetilde{x}: t\mapsto x(t+1)$ est aussi solution, et en déduire que la fonction x est 1-périodique si et seulement si $x(0)=x(1)$.

Montrer alors qu'il existe en général une unique solution 1-périodique.

Utilisation de la fonction `odeint`

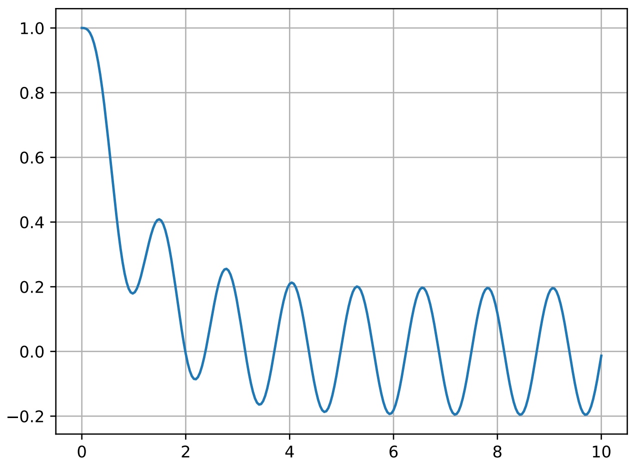
Un problème de Cauchy est résolu numériquement à l'aide de la fonction `odeint`, du module `scipy.integrate`.
Cette fonction exige trois arguments : `x = odeint(f, x0, t)` où :

- `f(x, t)` est la fonction qui décrit l'équation différentielle $x'=f(x,t)$;
- `x0` est la condition initiale $x(t_0)=x_0$;
- `t` est une discrétisation du temps à partir de la date t_0 (un tableau $[t_0,t_0+h,t_0+2h,\dots]$).

Le résultat renvoyé est le tableau des valeurs $[x_0=x(t_0),x(t_0+h),x(t_0+2h),\dots]$ associé.

Par exemple, pour résoudre numériquement le problème de Cauchy $\begin{cases} x'=\cos(5t)-x\\ x(0)=1\end{cases}$ on réalise le script ci-dessous :

```
def f(x, t):
    return np.cos(5*t) - x

t = np.linspace(0, 10, 256)
x = odeint(f, 1, t)

plt.plot(t, x)

plt.grid()
plt.show()
```



1.2 Système d'équations linéaires du premier ordre

Définition. — *Un* système d'équations différentielles linéaires du premier ordre *est un système de la forme :*

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \quad \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

les fonctions considérées étant des fonctions continues, définies sur un intervalle I *et à valeurs réelles ou complexes.*

Ce système se met immédiatement sous la forme matricielle :

$$X' = A(t)X + B(t) \tag{E}$$

où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont des fonctions vectorielles continues. On appelle *équation homogène* associée à l'équation (E) l'équation différentielle :

$$X' = A(t)X \tag{H}$$

On dit que l'application $X : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est *solution sur* I de (E) lorsque X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et vérifie :

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t).$$

Nous admettrons le *théorème de Cauchy* qui affirme que pour tout $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ il existe une unique solution définie sur I au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Théorème 1.3 — *Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $X' = A(t)X + B(t)$, et S celui des solutions de l'équation homogène $X' = A(t)X$. Alors S est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et si X_{part} désigne une solution quelconque de* (E) *alors $\mathscr{S} = \left\{X_{part} + X \,\middle|\, X \in S\right\}$.*

Nous allons maintenant étudier l'équation homogène, avant de voir comment obtenir ensuite les solutions de l'équation générale à l'aide de la méthode dite de « variation des constantes ».

1.3 Étude de l'équation homogène

■ Cas d'une matrice diagonalisable

Commençons par étudier le cas particulier où la matrice $A(t)$ est constante et diagonalisable. Il existe donc une matrice inversible P telle que : $P^{-1}AP = D$ est diagonale.
Dans ce cas, $X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \iff Y' = DY$ avec $Y = P^{-1}X$.

Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$; le système est alors équivalent à : $\begin{cases} y_1' = d_1 y_1 \\ \quad \vdots \\ y_n' = d_n y_n \end{cases}$

Il se résout immédiatement et donne $Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{d_1 t} \\ \vdots \\ \lambda_n e^{d_n t} \end{pmatrix}$, puis $X(t) = PY(t)$.

Notons que si $(V_1, \ldots, V_n)$ désignent les vecteurs colonnes de P (ils constituent donc une base formée de vecteurs propres de A), alors $X(t) = \lambda_1 e^{d_1 t} V_1 + \cdots \lambda_n e^{d_n t} V_n$.

Remarque. Lorsque la matrice A est trigonalisable, cette même transformation conduit à un système qui se résout en cascade.

Exercice 3

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 2y+2z \\ y' = -x+2y+2z \\ z' = -x+y+3z \end{cases}$

Cas général

Revenons maintenant au cas général. Notons S l'espace des solutions de l'équation homogène $X' = A(t)X$. Nous avons déjà vu que S est un espace vectoriel de dimension n.

Définition. — *Une base $(X_1,\dots,X_n)$ de S est appelée un* système fondamental *de solutions du système linéaire.*

Exemple. Dans le cas où $A(t)$ est constante et diagonalisable, les solutions $t \mapsto e^{d_k t} V_k$, pour $k \in [\![1,n]\!]$, constituent un système fondamental de solutions.

Exemple. Considérons le système :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{tx+y}{1+t^2} \\ y' = \dfrac{-x+ty}{1+t^2} \end{cases} \iff X' = A(t)X \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}.$$

On constate que $X_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ sont deux solutions linéairement indépendantes ; elles constituent donc un système fondamental de solutions, et on peut affirmer que toutes les autres solutions vont se mettre sous la forme $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, soit :

$$\begin{cases} x : t \longmapsto \lambda_1 t - \lambda_2 \\ y : t \longmapsto \lambda_1 + \lambda_2 t \end{cases}$$

λ_1 et λ_2 peuvent être déterminés par une condition de Cauchy ; si on cherche par exemple la solution vérifiant les conditions $x(1) = 1$ et $y(1) = 2$ on obtient $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ (le système qu'on écrit est nécessairement de Cramer).

Revenons au cas général et considérons un système fondamental de solutions $(X_1,\dots,X_n)$. On introduit la fonction vectorielle $W : t \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}\big(X_1(t),\dots,X_n(t)\big) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; elle vérifie :

$$\forall t \in I, \quad W'(t) = A(t)W(t)$$

et toute solution $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k$ s'exprime : $X = W(t)L$ avec $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Le théorème de Cauchy appliqué au point t implique que quel que soit le vecteur X_0 il existe un unique vecteur L tel que $X_0 = W(t)L$. Ceci prouve la :

Proposition 1.4 — *Pour tout $t \in I$, la matrice $W(t)$ est inversible.*

L'intérêt de ce résultat est de fournir un moyen de caractériser un système fondamental de solutions. En effet :

Proposition 1.5 — *Soient $X_1,\dots,X_n$ des solutions, et la fonction $W : t \mapsto \mathrm{Mat}_{can}\big(X_1(t),\dots,X_n(t)\big)$. Alors $(X_1,\dots,X_n)$ est un système fondamental de solutions si et seulement s'il existe $t_0 \in I$ tel que la matrice $W(t_0)$ soit inversible.*

Remarque. Dans ce cas, la proposition précédente montre que quel que soit $t \in I$, la matrice $W(t)$ est inversible.

Remarque. On appelle *Wronskien* d'un système de solutions $(X_1,\dots,X_n)$ le déterminant de la matrice W, c'est à dire la fonction :

$$\mathcal{W} : t \mapsto \det\big(W(t)\big) = \det\big(X_1(t),\dots,X_n(t)\big).$$

Il s'agit d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui :

– ne s'annule jamais lorsque le système de solutions est un systéme fondamental ;

– est constamment nulle dans le cas contraire.

1.4 La méthode dite de *variation des constantes* (hors programme)

Supposons maintenant connu un système fondamental de solutions $(X_1,\dots,X_n)$ de l'équation homogène (H), et cherchons à en déduire les solutions du système différentiel (E).
Rappelons que les solutions de l'équation homogène sont données par :

$$X : t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k(t) = W(t)L \quad \text{avec } L = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n.$$

La méthode dite de *variation des constantes* consiste à effectuer le changement de fonction inconnue $X = W(t)Y$, licite puisque $W(t)$ est inversible.
On a $X' = W'(t)Y + W(t)Y'$ donc $X' = A(t)X + B(t) \iff W(t)Y' = B(t)$ (car $W'(t) = A(t)W(t)$), soit encore : $Y' = W(t)^{-1}B(t)$. On obtient Y en intégrant chacune des composantes.

Exemple. considérons le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{tx+y}{1+t^2} + t \\ y' = \dfrac{-x+ty}{1+t^2} + 1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad A(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons déjà vu qu'un système fondamental de solutions est : $X_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$, donc $W(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$. Ainsi, $W(t)^{-1} = \dfrac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$ et $Y' = W(t)^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On en déduit une solution particulière $Y_0 : t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui donne $X_0 : t \longmapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$. Les solutions générales sont donc :

$$\begin{cases} x : t \longmapsto t^2 + \lambda_1 t - \lambda_2 \\ y : t \longmapsto t + \lambda_1 + \lambda_2 t \end{cases}$$

1.5 Un exemple de résolution numérique

Les équations de Lokta-Volterra modélisent l'évolution conjointe de deux populations, l'une constituée de *proies* (des lapins par exemple), l'autre de *prédateurs* (des renards). Si u désigne le nombre de proies et v le nombre de prédateurs, l'évolution au cours des temps de ces deux quantités est représentée par un système de la forme

$$\begin{cases} u' = au - buv \\ v' = -cv + dbuv \end{cases}$$

où a, b, c, d sont des constantes caractéristiques des deux populations :

– a modélise le taux de reproduction des proies en l'absence de prédateur ;

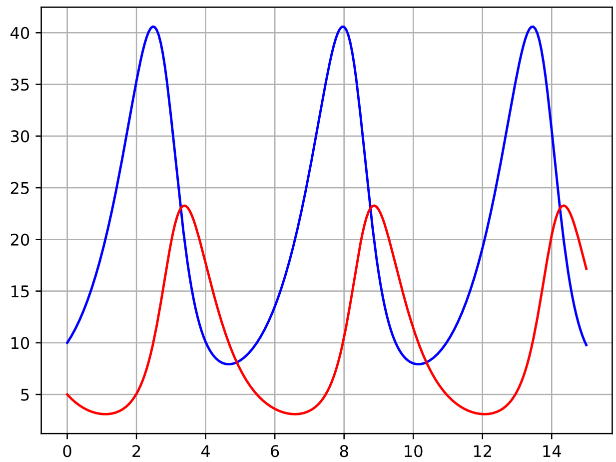
– b est le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs ;

– c est le taux de mortalité naturelle des prédateurs ;

– d décrit le taux de reproduction des prédateurs en présence des proies.

Ce système n'est pas linéaire ; il n'est pas résoluble autrement que numériquement. On utilise la fonction `odeint` pour visualiser une solution, en exécutant le script ci-dessous :

```
a, b, c, d = 1., 0.1, 1.5, 0.75

def F(X, t):
    [u, v] = X
    du = a * u - b * u * v
    dv = -c * v + d * b * u * v
    return [du, dv]

t = np.linspace(0, 15, 256)      # tracé sur un intervalle de temps de 15 ans

X = odeint(F, [10, 5], t)        # au départ, il y a 10 lapins et 5 renards

plt.plot(t, X[:, 0], 'b')        # la population des lapins est représentée en bleu
plt.plot(t, X[:, 1], 'r')        # celle des renards en rouge

plt.grid()
plt.show()
```



2. Équations du second ordre

2.1 Équations linéaires scalaires d'ordre 2

Définition. — *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, *et* $a, b, c, d : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ *trois fonctions continues à valeurs réelles ou complexes. On appelle* équation différentielle linéaire du second ordre *toute équation différentielle de la forme :*

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t). \tag{E}$$

Une solution *sur* I *de cette équation différentielle est une application* $x : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ *de classe* $\mathscr{C}^2$ *vérifiant :*

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = d(t).$$

Remarque. lorsque a ne s'annule pas sur I, cette équation différentielle peut se mettre sous forme résolue :

$$x'' = u(t)x' + v(t)x + w(t) \qquad \text{avec} \quad u = -\frac{b}{a},\ v = -\frac{c}{a} \text{et } w = \frac{d}{a}.$$

Quitte à restreindre I, on supposera désormais cette condition satisfaite.

■ Le cas des équations à coefficients constants

Soit à résoudre l'équation : $ax'' + bx' + cx = d(t)$, où a, b et c sont des *constantes* (non nulle pour a) et d une fonction continue sur I.
Il a été vu en première année que les solutions sont de la forme $x_0 + y$, où x_0 est une solution particulière et y une solution quelconque de l'équation homogène associée : $ay'' + by' + cy = 0$.

Résolution de l'équation homogène
Pour trouver y on procède ainsi :

- si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2, y est combinaison linéaire des fonctions $(t \mapsto e^{r_1 t})$ et $(t \mapsto e^{r_2 t})$;
- si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ possède une racine double r, y est combinaison linéaire des fonctions $(t \mapsto e^{rt})$ et $(t \mapsto t\,e^{rt})$;
- si a, b, c sont réels et si l'équation caractéristique $ar^2+br+c = 0$ possède deux racines complexes conjuguées $\rho + i\omega$ et $\rho - i\omega$, y est combinaison linéaire des fonctions $(t \mapsto e^{\rho t}\cos\omega t)$ et $(t \mapsto e^{\rho t}\sin\omega t)$.

Remarque. Dans tous les cas on constate que l'espace des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension 2.

Résolution de l'équation générale
Pour résoudre l'équation générale, il suffit de trouver une solution particulière x_0 et de lui ajouter une solution quelconque y de l'équation homogène. Le cours de première année donne quelques méthodes pour trouver ces solutions particulières lorsque $d(t)$ prend une forme particulière :

- lorsque $d(t) = A\,e^{\lambda t}$ (avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$) il existe une solution particulière de la forme :
  - $x_0(t) = K\,e^{\lambda t}$ lorsque λ n'est par racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$;
  - $x_0(t) = Kt\,e^{\lambda t}$ lorsque λ est racine simple de l'équation caractéristique ;
  - $x_0(t) = Kt^2\,e^{\lambda t}$ lorsque λ est racine double de l'équation caractéristique.
- lorsque $d(t) = B\cos(\omega t)$ ou $d(t) = B\sin(\omega t)$ (avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$) on applique le *principe de superposition* : on cherche une solution particulière z_0 de l'équation $ax'' + bx' + cx = B\,e^{i\omega t}$. Alors $x_c = (z_0 + \overline{z_0})/2$ est solution particulière de $ax''+bx'+cx = B\cos(\omega t)$ et $x_s = (z_0 - \overline{z_0})/(2i)$ est solution particulière de $ax''+bx'+cx = B\sin(\omega t)$.

Exercice 4
Résoudre l'équation différentielle $x'' + 4x = \cos(2t)$.

2.2 Retour au cas général

D'un point de vue théorique, une équation différentielle linéaire *résolue* du second ordre est équivalente à un système différentiel du premier ordre, dès lors qu'on pose $X = \begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix}$:

$$x'' = u(t)x' + v(t)x + w(t) \iff \begin{pmatrix} x'' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w(t) \\ 0 \end{pmatrix} \iff X' = A(t)X + B(t)$$

Ceci nous permet d'en déduire un certain nombre de résultats :

- pour tout $t_0 \in I$ et tout couple $(x_0, x_0') \in \mathbb{K}^2$, le problème de Cauchy :
$$\begin{cases} x'' = u(t)x' + v(t)x + w(t) \\ x(t_0) = x_0 \quad x'(t_0) = x_0' \end{cases}$$
  admet une solution unique sur I ;
- l'ensemble des solutions de l'équation homogène $x'' = u(t)x' + v(t)x$ est un espace vectoriel de dimension 2 ;
- l'ensemble des solutions sur I de l'équation : $x'' = u(t)x' + v(t)x + w(t)$ peut être décrit comme la somme d'une solution particulière et d'une solution quelconque de l'équation homogène.

Remarque. Tout comme pour les systèmes linéaires, nous ne donnerons pas de méthode générale de résolution de l'équation homogène, mais il est possible, connaissant une solution particulière de cette équation, d'en déduire les autres en appliquant la méthode suivante, dite *méthode de Lagrange* (hors programme) :

Supposons connue une solution x_0 de l'équation homogène *ne s'annulant pas*. On peut effectuer le changement de fonction inconnue $x = x_0 y$. On calcule :

$$x' = x_0' y + x_0 y' \quad \text{et} \quad x'' = x_0'' y + 2x_0' y' + x_0 y''$$

donc $x'' = u(t)x' + v(t)x \iff x_0 y'' + \big(2x_0' - u(t)x_0\big)y' = 0$, qui est une équation différentielle homogène du premier ordre vis à vis de y', et que l'on sait résoudre.

Exercice 5

Résoudre l'équation différentielle $(t^2+1)x'' - 2x = 0$ en commençant par chercher un polynôme solution.

Remarque. La méthode de Lagrange s'applique aussi pour résoudre l'équation générale, toujours à condition de connaître une solution particulière x_0 de l'équation homogène ne s'annulant pas. Cette fois, le changement de fonction inconnue $x = x_0 y$ conduit à l'équation $x0y'' + \big(2x_0' - u(t)x_0\big)y' = w(t)$, équation différentielle du premier ordre vis-à-vis de y'.

Exercice 6

Chercher une solution particulière de l'équation homogène $-t^2x'' + 2tx' - 2x = 0$ sous la forme $t \mapsto t^\alpha$ et en déduire les solutions de l'équation $-t^2x'' + 2tx' - 2x = 2t^3\,\mathrm{e}^t$.

Remarque. On appelle *wronskien* des solutions x_1 et x_2 la fonction $\mathcal{W} : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ définie par :

$$\mathcal{W} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = x_1 x_2' - x_1' x_2.$$

Nous avons : $\mathcal{W}' = x_1 x_2'' - x_1'' x_2 = x_1(u(t)x_2' + v(t)x_2) - (u(t)x_1' + v(t)x_1)yx_2 = u(t)\mathcal{W}$ donc $\forall t \in \mathrm{I}$, $\mathcal{W}(t) = \lambda \mathrm{e}^{\mathrm{U}(t)}$, U désignant une primitive de u. Si on avait $\lambda = 0$, $\mathcal{W}$ serait identiquement nulle et les fonctions x_1 et x_2 seraient liées.

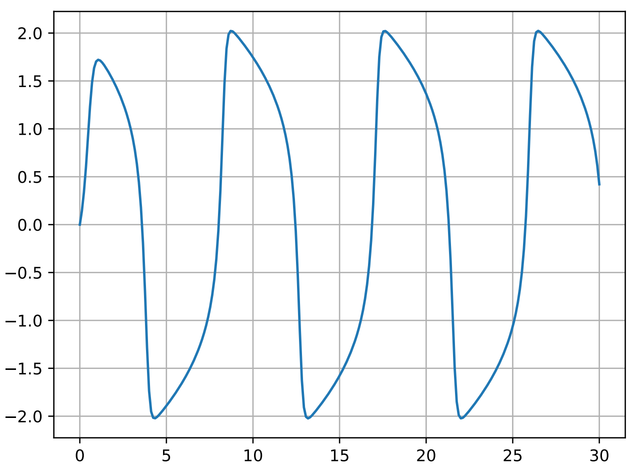
2.3 Un exemple numérique

Nous l'avons dit, résoudre une équation différentielle scalaire d'ordre 2 revient à résoudre un système différentiel à deux inconnues :

$$x'' = \mathrm{F}(x, x', t) \iff \begin{cases} x' = y \\ y' = \mathrm{F}(x, y, t) \end{cases}$$

Par exemple, pour résoudre numériquement le problème de Cauchy $\begin{cases} x'' = 3(1-x^2)x' - x \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$ on réalise le script suivant :

```
def F(X, t):
    [x, dx] = X
    d2x = 3 * (1 - x**2) * dx - x
    return [dx, d2x]

t = np.linspace(0, 30, 256)
X = odeint(F, [0, 1], t)

plt.plot(t, X[:, 0])

plt.grid()
plt.show()
```



2.4 Fonctions convexes (hors programme)

Définition. — *Soit* I *un intervalle non ponctuel, et* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$*. On dit que* f *est* convexe *lorsque :*

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2,\ \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leqslant (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$$

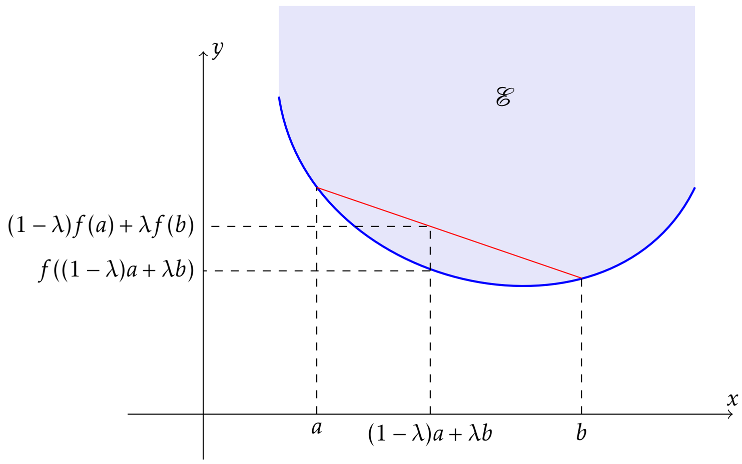


Figure 2 – Une fonction convexe : le sous-arc est situé sous la corde.

Proposition 2.1 — *f est convexe si et seulement si l'ensemble $\mathscr{E} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x \in \mathrm{I} \text{ et } f(x) \leqslant y\big\}$ est une partie convexe du plan.*

Lemme — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, et $a < b < c$ dans* I*. Alors* $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$.

Proposition 2.2 — *Soit f une fonction dérivable sur* I*. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante sur* I.

Corollaire — *Soit f une fonction deux fois dérivable sur* I*. Alors f est convexe si et seulement si* $f'' \geqslant 0$.

Théorème 2.3 — *Soit f une fonction dérivable sur* I*. Alors f est convexe sur* I *si et seulement si la courbe représentative de f est située au dessus de chacune de ses tangentes.*

Remarque. On appelle *inégalité de convexité* l'application du théorème 2.3 à certaines fonctions usuelles, tel :

- pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + t \leqslant \mathrm{e}^t$;
- pour tout $t > -1$, $\ln(1+t) \leqslant t$.

Exercice 7

Montrer que toute fonction convexe, dérivable et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante. Est-ce vrai sur $\mathbb{R}_+$?

■ Équation de Sturm-Liouville

Considérons deux fonctions a et b de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I, ainsi que l'équation différentielle homogène de degré 2 : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$. Si on effectue le changement de fonction inconnue $y = \mathrm{e}^{\alpha(t)} x(t)$ on obtient l'équation :

$$x'' + \big(2\alpha'(t) + a(t)\big)x' + \big(\alpha''(t) + \alpha'(t)^2 + a(t)\alpha'(t) + b(t)\big)x = 0.$$

On peut toujours choisir la fonction α de sorte que $2\alpha' + a = 0$. En posant $q = \alpha'' + a\alpha' + b$ on est ramené à la résolution de l'équation $\boxed{x'' + q(t)x = 0,}$ dite équation de *Sturm-Liouville*.

Théorème 2.4 — *Si x est une solution non identiquement nulle de l'équation $x'' + q(t)x = 0$, alors les zéros de x sont isolés. Autrement dit, si $x(t_0) = 0$, il existe η positif tel que pour tout $t \in \mathrm{I} \cap [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \setminus \{t_0\}$, $x(t) \neq 0$.*

Remarque. Le résultat de ce théorème est en réalité vrai pour n'importe quelle équation différentielle homogène du second ordre : d'après le théorème de Cauchy, toute solution qui s'annule au même endroit que sa dérivée ne peut qu'être la fonction nulle.

Les solutions d'une équation de Sturm-Liouville possèdent des propriétés qui sont l'objet de nombre d'exercices, certains en connection avec la notion de convexité, comme par exemple dans l'exercice suivant.

Exercice 8

a. Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs négatives, et x une solution non nulle de l'équation $x'' + q(t)x = 0$. Montrer que x possède au plus un zéro.

b. Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs positives, non identiquement nulle. Montrer que toute solution de : $x'' + q(t)x = 0$ s'annule au moins une fois.