

Chapitre VII

Intégration

L'intégration est un concept fondamental en mathématiques, issu du calcul des aires. À ce titre, on peut considérer que ses racines se trouvent parmi les premiers calculs d'aires et de volumes de l'antiquité. Mais c'est à Leibniz, au XVII^e siècle qu'on doit les fondements de la théorie de l'intégration, en particulier par l'introduction d'un symbolisme reliant intégration et dérivation. C'est d'ailleurs lui qui est à l'origine du symbole \int .

Il faut néanmoins attendre Riemann (en 1854) pour avoir une première théorie de l'intégration complète, c'est à dire une définition précise de ce qu'est une fonction *intégrable*. Par la suite, d'autres théories, plus élaborées, ont vu le jour, telles l'intégrale de Lebesgue (1902), ou encore l'intégrale de Kurzweil-Henstock (1950).

Dans ce chapitre nous supposerons importée la fonction `quad` du module `scipy.integrate`.

```
from scipy.integrate import quad
```

1. Intégration des fonctions continues par morceaux

1.1 Fonctions continues par morceaux

■ Subdivision d'un intervalle

DÉFINITION. — Une subdivision d'un segment $[a, b]$ est une suite finie $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ vérifiant :

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Le pas de la subdivision est le réel $p(\sigma) = \max\{t_{i+1} - t_i \mid i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$. La subdivision est dite régulière lorsque

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, t_{i+1} - t_i = p(\sigma), \text{ soit encore : } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, t_i = a + i \frac{b-a}{n}.$$

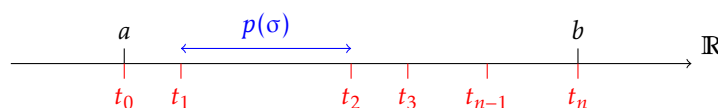


FIGURE 1 – Une subdivision du segment $[a, b]$.

DÉFINITION. — Une fonction numérique $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (t_0, \dots, t_n)$ de $[a, b]$ telle que f soit sur tous les intervalles $]t_k, t_{k+1}[$ la restriction d'une fonction continue sur $[t_k, t_{k+1}]$. Une telle subdivision sera dite adaptée à f .

Remarque. Concrètement, ceci signifie que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, f possède une limite (finie) à droite en t_i et à gauche en t_{i+1} . Notons en outre que la fonction f peut être continue en t_i , mais qu'à l'inverse toutes les discontinuités de f (qui doivent être en nombre fini) font partie des points de la subdivision σ (illustration figure 2).

Remarque. On dit qu'une subdivision σ' est plus fine qu'une subdivision σ lorsque σ est une sous-suite de σ' , en conséquence de quoi toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à f est encore adaptée à f .

Il est alors intéressant d'observer que si σ et σ' sont deux subdivisions quelconques de $[a, b]$, alors $\sigma \cup \sigma'$ est une subdivision à la fois plus fine que σ et que σ' .

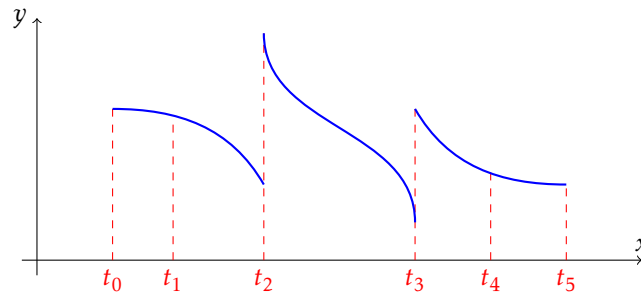


FIGURE 2 – Un exemple de fonction continue par morceaux et d’une subdivision (non minimale) qui lui est adaptée.

Qu’est ce qui peut empêcher une fonction définie sur un segment d’être continue par morceaux ?

- Cette fonction peut présenter un point en lequel il n’y a pas de limite à gauche ou à droite ; c’est par exemple le cas de la fonction $f : x \mapsto \sin(1/x)$ sur le segment $[-1, 1]$, quelle que soit la valeur de $f(0)$;
- cette fonction peut présenter une limite infinie en un point ; c’est par exemple le cas de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur le segment $[-1, 1]$, quelle que soit la valeur de $f(0)$;
- cette fonction peut présenter un nombre *infini* de discontinuités ; c’est par exemple le cas de la fonction $f : x \mapsto x \lfloor 1/x \rfloor$ prolongée par $f(0) = 1$, bien qu’elle possède en tout point une limite à gauche et à droite.

PROPOSITION 1.1 — Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

THÉORÈME 1.2 — L’ensemble $\mathcal{C}_m^0([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux est un sous-espace vectoriel de l’espace $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions bornées sur $[a, b]$. De plus, si f et g sont continues par morceaux sur $[a, b]$, il en est de même de leur produit fg .

Remarque. Rappelons qu’une fonction $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est dite *en escalier* lorsqu’il existe une subdivision $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$. Bien entendu, toute fonction en escalier sur $[a, b]$ est continue par morceaux sur cet intervalle, et par une preuve analogue à celle du théorème précédent on montre que les fonctions en escalier constituent un sous-espace vectoriel du \mathbb{K} -espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque

DÉFINITION. — Soit I un intervalle quelconque. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux lorsque pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I , la restriction de f à $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Exemple. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} : elle possède en tout point une limite finie à gauche et à droite et, bien que ses discontinuités soient en nombre infini, ne possède qu’un nombre *fini* de discontinuité sur tout segment. Pour ces mêmes raisons, la fonction $f : x \mapsto x \lfloor 1/x \rfloor$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$. Elle n’est en revanche pas continue par morceaux sur $[0, 1]$, bien qu’elle soit prolongeable par continuité en 0 !

1.2 Intégrale sur un segment d’une fonction continue par morceaux

Ceci étant posé, définir la valeur de l’intégrale d’une fonction continue par morceaux sur un segment ne pose pas de problème :

DÉFINITION. — Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, et $\sigma = (t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b)$ une subdivision adaptée à f . L’intégrale de f sur $[a, b]$ est alors la quantité :

$$\int_{[a, b]} f = \int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) dt.$$

Remarque. Pour valider cette définition, il faut montrer que cette valeur ne dépend pas du choix de la subdivision subordonnée à f , mais ceci ne présente pas de difficulté.

Cas d'une fonction en escalier

Si $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction en escalier et σ une subdivision qui lui est adaptée, si $v_k \in \mathbb{K}$ désigne la valeur

que prend ϕ sur l'intervalle $]t_k, t_{k+1}[$, alors :
$$\int_{[a,b]} \phi = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) v_k.$$

Lorsque $v_k \in \mathbb{R}_+$, cette quantité peut être interprétée comme l'aire délimitée par l'axe des abscisses et la fonction ϕ (illustration figure 3).

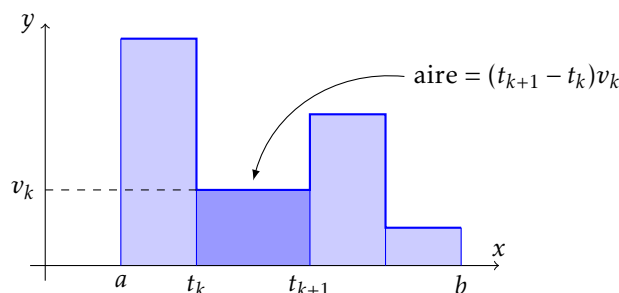


FIGURE 3 – Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction en escalier.

Nous admettons que cette interprétation graphique reste pertinente pour une fonction continue par morceaux. Rappelons que cette interprétation géométrique est à la base de deux résultats du cours de première année : la notion de somme de Riemann, ainsi que les méthodes des rectangles et des trapèzes pour le calcul approché d'une intégrale.

THÉORÈME 1.3 (Sommes de Riemann) — Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue sur le segment $[a, b]$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt.$$

EXERCICE 1

Déterminer la limite suivante :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}.$$

■ Méthode des rectangles et des trapèzes

Ces deux méthodes fournissent une valeur approchée de $\int_a^b f(t) dt$ lorsque f est continue sur $[a, b]$.

La méthode des rectangles consiste à approcher cette intégrale par une somme de Riemann, autrement dit à approcher f sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ par une valeur constante ($f(t_k)$ pour la méthode du rectangle gauche, $f(t_{k+1})$ pour la méthode du rectangle droit).

La méthode des rectangles gauches consiste donc à approcher $\int_a^b f(t) dt$ par la somme de Riemann

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

EXERCICE 2

Rédiger en Python une fonction `rectangle(f, a, b, n)` qui prend en arguments une fonction f (supposée continue sur $[a, b]$), deux réels a et b et un entier n et qui renvoie la quantité $R_n(f)$.

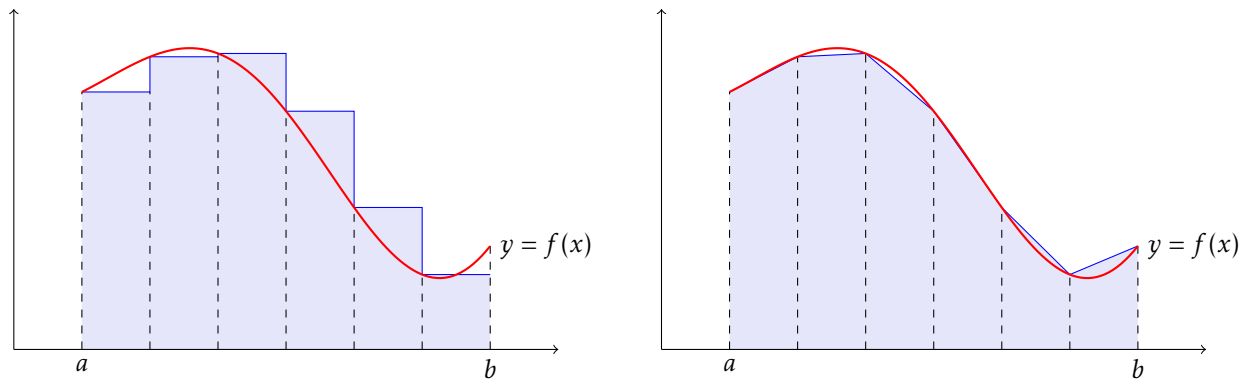


FIGURE 4 – Méthodes des rectangles gauches et méthode des trapèzes.

Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à approcher f sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ par une fonction affine.

EXERCICE 3

Soit $T_n(f)$ la quantité par laquelle on approche $\int_a^b f(t) dt$ par la méthode des trapèzes.

Montrer que $T_n(f) = R_n(f) + \left(\frac{b-a}{n}\right) \frac{f(b)-f(a)}{2}$.

En pratique, ces deux méthodes sont trop lentes pour fournir des résultats acceptables : si on veut obtenir une valeur approchée avec une grande précision, il faut prendre une grande valeur pour n , ce qui engendre des erreurs numériques liées à la manipulation des nombres flottants (ce qui peut empêcher dans certains cas d'obtenir la précision souhaitée). Il est donc indispensable d'utiliser une méthode numérique plus efficace (la méthode de Simpson par exemple, est d'ordre 4), ou en Python d'utiliser la fonction `quad` du module `scipy.integrate` :

`s = quad(f, a, b)` est un couple : `s[0]` est la valeur approchée de l'intégrale et `s[1]` une estimation de l'erreur commise.

Exemple. La fonction de Bessel du premier ordre est définie par l'expression $J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t - x \sin t) dt$.

Il n'est pas possible d'exprimer cette fonction avec les fonctions usuelles ; il est néanmoins possible de la définir en Python à l'aide de la fonction `quad` :

```
def J1(x):
    def f(t):
        return np.cos(t - x * np.sin(t))
    return quad(f, 0, np.pi)[0] / np.pi
```

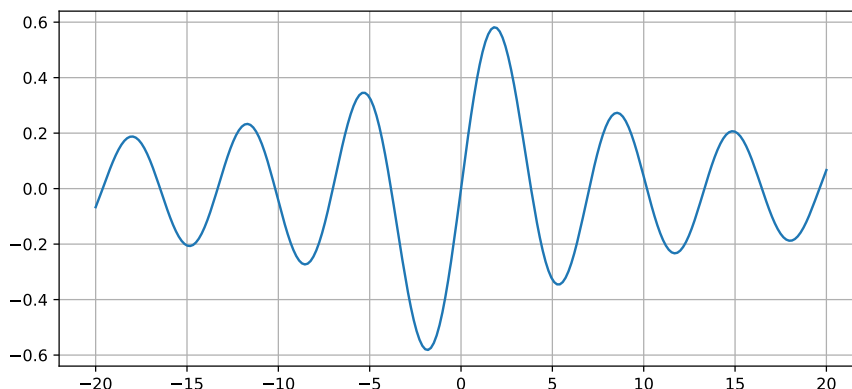
Le graphe de cette fonction est visible figure 5.

1.3 Propriétés de l'intégrale

Les propriétés suivantes, établies en première année dans le cas des fonctions continues, s'étendent au cas des fonctions continues par morceaux.

PROPOSITION 1.4 — L'application qui à une fonction continue par morceaux associe son intégrale sur $[a, b]$ est linéaire : si f et g sont continues par morceaux sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} (\lambda f + g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$.

PROPOSITION 1.5 — Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Alors : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

FIGURE 5 – Le graphe de la fonction J_1 .

Remarque. La proposition 1.5 appliquée à une fonction à *valeurs réelles positives* implique le résultat suivant, dite propriété de *positivité* de l'intégrale :

$$\text{si } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ est continue par morceaux, alors } \int_{[a,b]} f \geq 0.$$

Une conséquence immédiate de ce résultat est la propriété dite de *croissance* de l'intégrale :

si f et g sont deux fonctions réelles continues par morceaux sur $[a, b]$ et telles que $f \leq g$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.

COROLLAIRE — Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux, alors : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq |b - a| \cdot \|f\|_{\infty, [a,b]}$.

Enfin, sur le même sujet on rappellera un résultat important du cours de première année, *mais qui ne s'applique pas aux fonctions continues par morceaux* :

PROPOSITION 1.6 — Une fonction continue et à valeurs positives sur $[a, b]$ est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.

EXERCICE 4

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour toute fonction en escalier $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on ait $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$. Montrer que $f = 0$.

1.4 Dérivation et intégration

Nous allons maintenant rappeler un résultat vu en première année, souvent connu comme le *théorème fondamental de l'analyse* (le théorème 1.7 de ce document). Ce dernier établit un lien entre intégration et dérivation (un résultat en général attribué à Isaac Newton). Plus précisément, il affirme que le calcul d'une intégrale d'une fonction continue se ramène à la recherche d'une primitive de cette fonction.

■ Primitives et intégrale d'une fonction continue

THÉORÈME 1.7 — Soit I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, et $a \in I$. Pour tout réel $x \in I$, on note $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors F est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et $F' = f$.

Ce théorème ramène le calcul d'une intégrale à la recherche d'une primitive. Commençons par rappeler la définition suivante :

DÉFINITION. — Soit f une fonction continue sur I . On dit qu'une application $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f lorsque g est de classe \mathcal{C}^1 , et lorsqu'en tout point de I , $g'(x) = f(x)$.

Les primitives sur un intervalle sont définies « à une constante près » :

PROPOSITION 1.8 — Si g_1 et g_2 sont deux primitives de f , il existe une constante λ telle que $g_2 = g_1 + \lambda$.

Nous pouvons donc préciser le résultat du théorème 1.7 en énonçant le résultat suivant :

PROPOSITION 1.9 — Soit f une fonction continue sur I , et $a \in I$. On définit une fonction F sur I en posant : $\forall x \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Alors F est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Voici enfin le résultat qui permet de calculer une intégrale en recherchant une primitive :

COROLLAIRE — Si f est continue et g une primitive quelconque de f , alors : $\forall (a, b) \in I^2$, $\int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a)$.

EXERCICE 5

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une application strictement croissante de classe \mathcal{C}^1 , telle que $f(0) = 0$. Montrer, en appliquant le théorème 1.7, que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad xf(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt.$$

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

1.5 Changement de variable et intégration par parties

THÉORÈME 1.10 (changement de variable) — Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, $[\alpha, \beta]$ un segment et $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow I$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Alors :

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(u)) \phi'(u) du.$$

Mise en œuvre pratique

Il y a deux façons d'utiliser cette formule : partir de l'expression de droite pour obtenir celle de gauche, ou procéder dans le sens contraire.

Utiliser la formule de la droite vers la gauche nécessite de reconnaître dans l'expression de l'intégrale à calculer $\int_{\alpha}^{\beta} g(u) du$ un terme de la forme $g(u) = f(\phi(u))\phi'(u)$ (il faut donc « deviner » f et ϕ).

Dans ce cas, il faut donc identifier les expressions $t = \phi(u)$ et $dt = \phi'(u) du$.

Exemple. Soit $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{3 + \cos^2 u} du$. On pose $t = \cos u$ de manière à avoir $dt = -\sin u du$. Ainsi,

$$I = \int_{\cos 0}^{\cos \pi} \frac{-dt}{3 + t^2} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{3 + t^2} = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \frac{dt}{1 + (t/\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \right]_{-1}^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

EXERCICE 6

Calculer l'intégrale $\int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u+2u}}$.

Utiliser la formule de la gauche vers la droite est souvent utilisé pour faire apparaître une simplification dans l'expression initiale. Une fois posés $t = \phi(u)$ et $dt = \phi'(u)du$ il faut trouver des antécédents par ϕ des bornes de l'intégrale initiale.

Exemple. Soit $I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$. On pose $t = \sin u$ et $dt = \cos u du$. On choisit $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$ pour avoir $\sin \alpha = 0$ et $\sin \beta = 1$. Ainsi :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sqrt{1 - \sin^2 u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^2 du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2u)}{2} du = \left[\frac{u}{2} - \frac{1}{4} \sin(2u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

EXERCICE 7

Calculer l'intégrale $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{t^2 \sqrt{t^2 - 1}}$.

THÉORÈME 1.11 (intégration par parties) — Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = \left[f(t)g(t) \right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Cette formule peut être représentée par le schéma suivant :

$$\begin{array}{r} + \left| \begin{array}{cc} f(t) & g'(t) \\ f'(t) & g(t) \end{array} \right| \end{array}$$

Le terme de gauche de la formule se retrouve sur la première ligne, le terme entre crochets sur la diagonale, et le reste intégral sur la dernière ligne :

$$\begin{array}{r} + \left| \begin{array}{cc} f(t) & g'(t) \\ f'(t) & g(t) \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{cc} f(t) & g'(t) \\ f'(t) & g(t) \end{array} \right| \end{array} = \begin{array}{r} + \left| \begin{array}{cc} f(t) & g'(t) \\ f'(t) & g(t) \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{cc} f(t) & g'(t) \\ f'(t) & g(t) \end{array} \right| \end{array}$$

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = \left[f(t)g(t) \right]_a^b + \int_a^b f'(t)g(t) dt$$

L'intérêt de ce schéma est de permettre d'effectuer plusieurs intégrations par parties successives en une seule étape ; voici par exemple les schémas pour effectuer deux puis trois intégrations par parties successives, et les formules correspondantes :

$$\begin{array}{r} + \left| \begin{array}{cc} f(t) & g''(t) \\ f'(t) & g'(t) \\ f''(t) & g(t) \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{cc} f(t) & g''(t) \\ f'(t) & g'(t) \\ f''(t) & g(t) \end{array} \right| \\ + \left| \begin{array}{cc} f(t) & g''(t) \\ f'(t) & g'(t) \\ f''(t) & g(t) \end{array} \right| \end{array} \int_a^b f(t)g''(t) dt = \left[f(t)g'(t) - f'(t)g(t) \right]_a^b + \int_a^b f''(t)g(t) dt$$

$$\begin{array}{r} + \left| \begin{array}{cc} f(t) & g^{(3)}(t) \\ f'(t) & g''(t) \\ f''(t) & g'(t) \\ f^{(3)}(t) & g(t) \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{cc} f(t) & g^{(3)}(t) \\ f'(t) & g''(t) \\ f''(t) & g'(t) \\ f^{(3)}(t) & g(t) \end{array} \right| \\ + \left| \begin{array}{cc} f(t) & g^{(3)}(t) \\ f'(t) & g''(t) \\ f''(t) & g'(t) \\ f^{(3)}(t) & g(t) \end{array} \right| \end{array} \int_a^b f(t)g^{(3)}(t) dt = \left[f(t)g''(t) - f'(t)g'(t) + f''(t)g(t) \right]_a^b - \int_a^b f^{(3)}(t)g(t) dt$$

EXERCICE 8

En effectuant autant d'intégrations par parties que nécessaire, calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 \sin t dt$.

1.6 Formules de Taylor

Lorsque $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, on peut écrire : $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$.

Cette relation va avoir plusieurs conséquences, à commencer par le résultat suivant :

THÉORÈME 1.12 (Inégalité des accroissements finis) — Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. On suppose l'existence d'un réel k tel que : $\forall t \in [a, b], |f'(t)| \leq k$. Alors : $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$.

La généralisation de cette majoration va passer par plusieurs intégrations par parties successives. En effet, si on adopte le schéma suivant on obtient :

$$+ \begin{array}{l} f'(t) \\ f''(t) \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ t - b \end{array} \left| \begin{array}{l} f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt = f(a) + (b - a)f'(a) + \int_a^b (b - t)f''(t) dt \end{array} \right.$$

En réitérant ce procédé, ceci nous amène au théorème suivant :

THÉORÈME 1.13 (Formule de Taylor avec reste intégral) — Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} , et $a \in I$.

Alors : $\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.

Remarque. $T_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ est une fonction polynomiale, appelée *polynôme de Taylor* d'ordre n de f en a . C'est un polynôme dont les dérivées successives jusqu'au rang n coïncident au point a avec celles de f . La quantité $R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ est l'expression intégrale de l'erreur qu'on commet en approchant $f(x)$ par $T_n(x)$.

Pour majorer cette erreur, on utilise le résultat suivant :

PROPOSITION 1.14 (inégalité de Taylor-Lagrange) — Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} , et $a \in I$. On suppose l'existence d'un réel M vérifiant : $\forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq M$. Alors :

$$|f(x) - T_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

EXERCICE 9

Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1 à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et en déduire : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$.

Notons pour finir que la fonction $f^{(n+1)}$ (étant supposée continue) est bornée au voisinage de a , ce qui nous permet de déduire de l'inégalité de Taylor-Lagrange le résultat suivant :

COROLLAIRE (Formule de Taylor-Young) — Soit I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} . Alors f admet au voisinage de a le développement limité suivant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + O((x-a)^{n+1}).$$

2. Intégration sur un intervalle

La notion d'intégrale que nous avons définie présente des limitations : l'intervalle d'intégration doit être un segment, et la fonction, continue par morceaux. Dans le cadre des fonctions à valeurs positives, ceci permet d'interpréter l'intégrale comme étant l'aire délimitée par le graphe de la fonction.

Lorsque l'intervalle d'intégration n'est plus un segment, le domaine délimité par la fonction peut ne plus être borné. Nous allons voir cependant que dans certains cas il reste possible de donner un sens à l'aire de ce domaine, par le biais d'un passage à la limite dans des intégrales : c'est la notion d'intégrale généralisée.

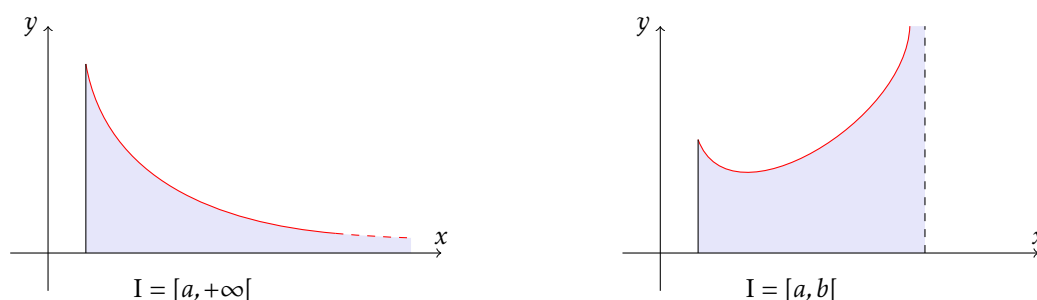


FIGURE 6 – Deux exemples de domaines non bornés, soit parce que l'une des deux bornes est infinie, soit parce que f n'admet pas de limite finie en une des deux bornes.

Nous verrons que cette intégrale généralisée partage un certain nombre de propriétés avec l'intégrale définie, avant d'étudier un théorème d'interversion limite-intégrale adapté aux intégrales généralisées : le théorème de convergence dominée.

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle quelconque de \mathbb{R} , et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. L'objectif est de donner un sens, lorsque c'est possible, à l'intégrale $\int_I f$; on parlera alors d'intégrale généralisée, ou encore d'intégrale impropre.

2.1 Intégrales convergentes

Si I n'est pas un segment, I ne peut prendre qu'une des trois formes suivantes : $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Nous allons traiter séparément chacun de ces trois cas.

■ Le cas où $I = [a, b[$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Pour tout $x \in [a, b[$, f est continue par morceaux sur le segment $[a, x]$, donc $\int_a^x f(t) dt$ a bien un sens.

DÉFINITION. — On dira que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente lorsque $\int_a^x f(t) dt$ possède une limite finie quand x tend vers b en restant dans $[a, b[$. On notera alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt.$$

On notera que lorsque f est prolongeable par continuité en b , cette définition est en cohérence avec la notion d'intégrale sur le segment $[a, b]$ puisque dans ce cas, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une application définie et continue sur $[a, b]$, et en particulier en b . Dans ces conditions, on dira que l'intégrale est *faussement impropre*, puisqu'elle ne correspond pas à l'aire d'un domaine non borné : en prolongeant par continuité la fonction f en b on retrouve l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Remarque. On ne manquera pas de noter la similitude de la démarche avec celle utilisée pour définir la somme d'une série : à la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ correspondent les sommes partielles $n \mapsto \sum_{k=0}^n u_k$, et il s'agit dans les deux cas de déterminer si ces expressions possèdent une limite (l'une en b , l'autre en $+\infty$).

Exemples.

- L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

Pour étudier la convergence des deux exemples précédents, il a été nécessaire de calculer les « intégrales partielles » puis de passer à la limite. En revanche, il n'est pas nécessaire de procéder à ce calcul dans le cas de l'intégrale suivante : $\int_0^1 (t-1)\ln(1-t) dt$ puisqu'il s'agit d'une intégrale faussement impropre : en effet, $\lim_{t \rightarrow 1} (t-1)\ln(1-t) = 0$. Comme on peut le constater sur le graphe ci-dessous, le domaine délimité par le graphe de la fonction est borné :

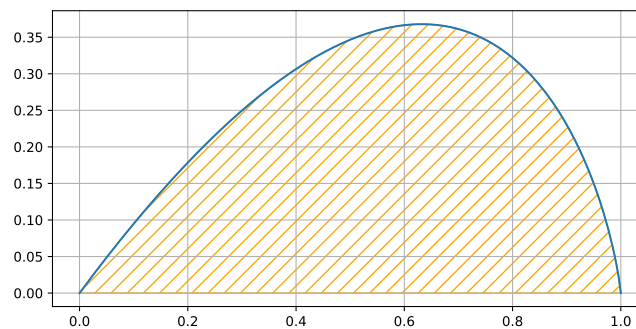


FIGURE 7 – Le graphe de la fonction $t \mapsto (t-1)\ln(1-t)$.

EXERCICE 10

Discuter en fonction de la valeur de $\beta > 0$ la convergence de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$.

■ Le cas où $I =]a, b]$, $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$

DÉFINITION. — De manière symétrique, on dira que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente lorsque $\int_x^b f(t) dt$ possède une limite finie quand x tend vers a en restant dans $]a, b]$. On notera alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t) dt.$$

Exemples.

- L'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
- L'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente (et est égale à -1).

En revanche, l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est faussement impropre, car $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.

EXERCICE 11

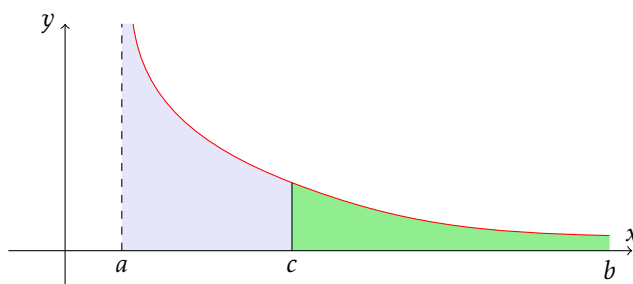
Étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$.

■ Le cas où $I =]a, b[$

Dans ce dernier cas, nous allons utiliser la relation de Chasles pour nous ramener aux deux cas précédents. Considérons en effet un point c de l'intervalle $]a, b[$.

DÉFINITION. — On dira que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente lorsque les deux intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes, et on posera alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$



Il est aisé de vérifier que cette définition ne dépend pas du choix du point $c \in]a, b[$.

Remarque. Pour chacun des trois types d'intervalles, une intégrale qui n'est pas convergente sera bien entendu dite *divergente*.

Par exemple, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est toujours divergente, puisque $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ ne converge que si $\alpha < 1$, alors que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ ne converge que si $\alpha > 1$.

Remarque. Cette définition permet d'étendre sans peine au cas des intégrales convergentes la relation de Chasles et la propriété de linéarité des intégrales :

- Si les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_b^c f(t)dt$ sont convergentes, il en est de même de l'intégrale $\int_a^c f(t)dt$, et :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$$
- Si les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont convergentes, alors il en est de même de $\int_a^b (\lambda f + g)(t)dt$, et :

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

EXERCICE 12

- a. Montrer que si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt = 0$.
- b. Si on suppose de plus f décroissante, en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- c. Toujours en supposant f décroissante, montrer que $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

■ Intégration par parties et changement de variable

Une intégration par parties sur un intervalle qui n'est pas un segment peut conduire à une erreur : l'intégrale $\int_I u'v$ peut être convergente sans que $\int_I uv'$ le soit. Il convient donc de procéder avec prudence, en utilisant le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1 — Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I , telles que les limites aux bornes de I du produit uv existent. Alors les intégrales $\int_I u'v$ et $\int_I uv'$ ont même nature, et en cas de convergence,

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

où a et b désignent les bornes de I .

Remarque. Une autre possibilité consiste à effectuer l'intégration par parties sur un segment (par exemple sur $[a, x]$ lorsque $I = [a, b[$), puis, une fois tous les calculs effectués, passer à la limite (ici en faisant tendre x vers b).

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale : $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente et vaut $n!$.

EXERCICE 13

Justifier la convergence et calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$.

En ce qui concerne le changement de variable, on possède le résultat suivant :

THÉORÈME 2.2 — Soient I et J deux intervalles, $\phi : J \rightarrow I$ une bijection de classe \mathcal{C}^1 , et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Alors les intégrales $\int_I f$ et $\int_J (f \circ \phi) \times \phi'$ ont même nature, et en cas de convergence,

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u) du = \int_a^b f \circ \phi(t) \phi'(t) dt$$

lorsque a et b désignent les extrémités de J et $\phi(a)$ et $\phi(b)$ les limites respectives de ϕ en a et en b .

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 (\ln u)^n du$ est convergente et vaut $(-1)^n n!$.

EXERCICE 14

Justifier la convergence et calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$.

2.2 Fonctions à valeurs positives

L'inconvénient de la démarche que nous avons suivi jusqu'à présent est de nécessiter le calcul d'une primitive de f pour déterminer la nature de l'intégrale $\int_I f$; or cela n'est pas toujours possible. Nous allons donc tenter de nous affranchir de cette contrainte, en commençant par nous intéresser aux fonctions à valeurs positives.

En effet, lorsque $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue par morceaux et à valeurs positives, l'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une fonction croissante. Elle possède donc une limite lorsque x tend vers b si et seulement si elle est majorée¹.

1. On ne manquera pas de faire l'analogie avec les séries à terme général positif : lorsque (u_n) est une suite positive, la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est croissante, et la série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

De la même façon, lorsque $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue par morceaux et à valeurs positives, l'application $F : x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est décroissante et possède donc une limite lorsque x tend vers a si et seulement si elle est majorée.

Comme pour les séries, ces résultats vont engendrer plusieurs théorèmes de comparaison, qui reposent tous sur le résultat suivant :

THÉORÈME 2.3 (comparaison) — Soient f et g deux fonction continues par morceaux sur l'intervalle I , et à valeurs positives. On suppose que pour tout $t \in I$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$. Alors la convergence de l'intégrale $\int_I g$ entraîne celle de $\int_I f$.

De ce théorème vont résulter deux corollaires, qui vont permettre de comparer la nature des intégrales que nous allons rencontrer par la suite à la nature d'intégrales de référence. Ces deux corollaires seront énoncés dans le cas où $I = [a, b]$, mais leur énoncé s'adapte sans problème au cas symétrique où $I =]a, b]$.

COROLLAIRE (domination) — Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux, à valeurs positives, telles que $f(t) = O(g(t))$. Alors la convergence de $\int_a^b g(t) dt$ entraîne celle de $\int_a^b f(t) dt$.

COROLLAIRE (équivalence) — Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux, à valeurs positives, telles que $f(t) \sim_b g(t)$. Alors les intégrales $\int_a^b g(t) dt$ et $\int_a^b f(t) dt$ ont même nature.

Remarque. Les intégrales de référence que nous utiliserons sont les suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha > 1, \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha < 1, \quad \int_0^{+\infty} e^{-at} dt \text{ converge ssi } a > 0.$$

EXERCICE 15

À l'aide du théorème d'équivalence, prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)\sqrt{t^2 + 4}}$ converge.

À l'aide du théorème de domination, prouver que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ converge.

À l'aide d'un changement de variable, prouver que l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge.

2.3 Absolue convergence

La section précédente nous a donné des outils pour prouver la convergence des intégrales des fonctions à valeurs positives. Dans le cas général, nous allons nous y ramener à l'aide de la notion d'absolue convergence, notion semblable à celle que l'on connaît déjà dans le cadre des séries numériques.

THÉORÈME 2.4 — Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, telle que l'intégrale $\int_I |f|$ soit convergente. Alors il en est de même de l'intégrale $\int_I f$. On dira que cette dernière intégrale est absolument convergente, et que la fonction f est intégrable sur I .

Exemple. La fonction Γ est une fonction mathématique définie sur une partie du plan complexe par la formule : $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$.

En posant $\alpha = \Re(z)$ nous avons $|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{\alpha-1}$; étudions donc la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$.

- Au voisinage de 0, $e^{-t} t^{\alpha-1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}}$, donc (théorème d'équivalence) $\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.
- Au voisinage de $+\infty$, $e^{-t} t^{\alpha-1} \underset{+\infty}{=} O(e^{-t/2})$, donc (théorème de domination) $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

On en déduit que la fonction Γ est définie *au moins* lorsque $\Re(z) > 0$.

Remarque. La propriété la plus simple de la fonction Γ est de vérifier la relation : $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, qui résulte d'une intégration par parties :

$$\int_x^y e^{-t} t^z dt = \left[-e^{-t} t^z \right]_x^y + \int_x^y e^{-t} z t^{z-1} dt = e^{-x} x^z - e^{-y} y^z + z \int_x^y e^{-t} t^{z-1} dt$$

qui conduit en faisant tendre x vers 0 et y vers $+\infty$ à : $\Gamma(z+1) = 0 - 0 + z\Gamma(z)$.

Sachant que $\Gamma(0) = 1$ on en déduit aisément la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$; d'une certaine façon, la fonction Γ prolonge donc la fonction factorielle à une partie de \mathbb{C} .

Nous pouvons enfin traduire le théorème 2.3 et ses corollaires en termes d'intégrabilité :

THÉORÈME 2.5 — Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux, telles que $0 \leq |f| \leq g$. Si g est intégrable sur I , il en est de même de f , et $\left| \int_I f \right| \leq \int_I g$.

COROLLAIRE — Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux telles que $|f(t)| \underset{b}{=} O(g(t))$. Alors si g est intégrable sur $[a, b[$, il en est de même de f .

COROLLAIRE — Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux telles que $|f(t)| \underset{b}{\sim} g(t)$. Alors si g est intégrable sur $[a, b[$, il en est de même de f .

Les deux derniers résultats s'étendent bien entendu au cas de l'intervalle $]a, b]$.

■ Un exemple de semi-convergence

La notion d'intégrabilité que nous venons de définir est la seule qui généralise de manière pertinente la notion d'intégration sur un segment ; en effet nous verrons dans la section suivante que les différents théorèmes relatifs aux intégrales à paramètre exigent une hypothèse d'intégrabilité.

Cependant, il existe des intégrales qui sont convergentes sans être absolument convergentes : l'intégrale $\int_I f$ converge mais l'intégrale $\int_I |f|$ diverge. On dit dans ce cas que l'intégrale $\int_I f$ est *semi-convergente*. Attention, dans ce cas la fonction f **n'est pas** intégrable sur I (tout en possédant une intégrale, ce qui peut paraître paradoxal).

L'étude de la semi-convergence n'est pas un objectif du programme, aussi nous nous contenterons de voir un seul exemple :

PROPOSITION 2.6 — L'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente.

■ Espaces L^1 et L^2

Si I est un intervalle quelconque de \mathbb{R} , on note $L_{\text{cpm}}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues par morceaux et intégrables sur I , et $L_{\text{cpm}}^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues par morceaux et de

carrés intégrables sur I :

$$L_{\text{cpm}}^1(I, \mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}^0(I, \mathbb{K}) \mid \int_I |f| \text{ converge} \right\}$$

$$L_{\text{cpm}}^2(I, \mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}^0(I, \mathbb{K}) \mid \int_I |f|^2 \text{ converge} \right\}$$

THÉORÈME 2.7 — $L_{\text{cpm}}^1(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

PROPOSITION 2.8 — Si f est continue et intégrable sur I , alors $\int_I |f| = 0$ implique $f = 0$.

Remarque. Si on se restreint à l'espace $L_c^1(I, \mathbb{K})$ des applications continues et intégrables, la propriété précédente montre que l'application $f \mapsto \|f\|_1 = \int_I |f|$ est une norme sur cet espace.

LEMME — Si f et g sont de carré intégrable sur I , la fonction fg est intégrable sur I .

THÉORÈME 2.9 — $L_{\text{cpm}}^2(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Remarque. Si on se restreint à l'espace $L_c^2(I, \mathbb{K})$ des applications continues de carré intégrable, l'application $f \mapsto \|f\|_2 = \left(\int_I |f|^2 \right)^{1/2}$ est une norme sur cet espace. De plus, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cette norme est euclidienne et dérive du produit scalaire $\langle f | g \rangle = \int_I fg$, avec pour conséquence l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_I fg \right| \leq \left(\int_I |f|^2 \int_I |g|^2 \right)^{1/2}$$

On notera que cette inégalité reste vraie pour des fonctions seulement supposées continues par morceaux.

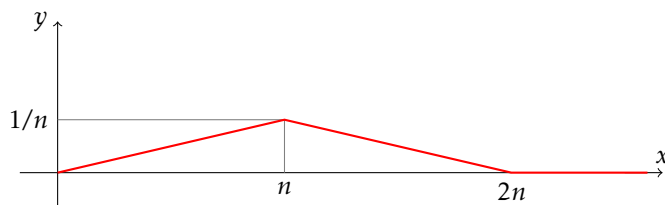
3. Le théorème de convergence dominée

Nous avons vu dans le chapitre sur les suites de fonctions que sous réserve d'une hypothèse de convergence uniforme sur le segment $[a, b]$, on pouvait intervertir passage à la limite et intégration :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

Malheureusement, ce théorème *ne s'étend pas* au cas de l'intégration sur un intervalle quelconque, comme le montre l'exemple suivant :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction continue et affine par morceaux dont le graphe est donné ci-dessous :



Puisque $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$. Pourtant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\int_0^{+\infty} f_n = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$.

Nous allons maintenant étudier un théorème permettant de faire une telle interversion dans le cadre d'un intervalle *quelconque*, segment ou pas. Cependant, la preuve de ce résultat sera admise, car inaccessible à ce niveau.

3.1 Le théorème de convergence dominée

Ce théorème s'applique aux fonctions à valeurs réelles ou complexes.

THÉORÈME 3.1 (Théorème de convergence dominée) — Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux sur I . On suppose que :

- (i) (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux ;
- (ii) il existe une fonction positive ϕ , continue par morceaux et intégrable sur I , telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \phi \quad (\text{hypothèse de domination}).$$

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I , et :

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n.$$

Remarque. IL n'est pas difficile de justifier l'intégrabilité des fonctions f_n : il s'agit d'une application directe du théorème 2.5. De même, l'hypothèse de convergence simple permet le passage à la limite dans l'inégalité : $\forall t \in I, |f_n(t)| \leq \phi(t)$ pour obtenir : $\forall t \in I, |f(t)| \leq \phi(t)$, ce qui permet d'appliquer de nouveau le théorème 2.5 pour justifier l'intégrabilité de f . En revanche, nous admettrons l'égalité encadrée.

Exemple. Considérons les intégrales de Wallis $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$. La suite de fonctions $f_n : t \mapsto (\cos t)^n$ converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto 0$ sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. Les fonction f_n et f sont continues par morceaux et les fonctions f_n sont dominées par la fonction intégrable $\phi : t \mapsto 1$, donc le théorème de convergence dominée s'applique : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = 0$.

Exemple. Considérons pour $n \geq 1$ les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t^n} dt$. La suite de fonctions $f_n : t \mapsto e^{-t^n}$ converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1[\\ e^{-1} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$. Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et les fonctions f_n sont dominées par la fonction intégrable $\phi : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1] \\ e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$, donc le théorème de convergence dominée s'applique : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^n} dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$.

EXERCICE 16

Soit $h : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{h(t)}{1+n^2 t^2} dt$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Lorsque $h(0) \neq 0$ et l'aide du changement de variable $x = nt$, déterminer un équivalent de u_n .

3.2 Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Pour inverser série et intégrale, nous allons là encore être obligés d'admettre le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2 — Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur I . On suppose que :

- (i) la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement et la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux ;

(ii) la série $\sum \int_1 |f_n|$ est convergente.

Alors la fonction S est intégrable sur I , et $\int_1 S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1 f_n$.

Exemple. Nous allons calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ à l'aide d'un développement en série.

$$\forall x \in]0, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \text{ donc } \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

Notons $f_n : x \mapsto (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$. Ces fonctions sont continues par morceaux sur $]0, 1[$, $\sum f_n$ converge simplement, et la somme $S : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue.

On calcule $\int_0^1 \left| (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} \right| dx = \frac{1}{n^2}$; sachant que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, le théorème d'intégration terme à terme s'applique : $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Exemple. Considérons un réel $\alpha > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $f_n : x \mapsto x^{\alpha-1} e^{-nx}$. Il s'agit de fonctions continues et intégrables sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-nx} = \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1}$ et (en posant $y = nx$) :

$$\int_0^{+\infty} |x^{\alpha-1} e^{-nx}| dx = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge dès lors que $\alpha > 1$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ lorsque $\alpha > 1$ (résultat qu'on pouvait obtenir directement), et dans ce cas :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha).$$

Par exemple, pour $\alpha = 2$ on obtient : $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

EXERCICE 17

La constante de Catalan est le réel : $K = - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt$. Établir l'égalité : $K = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

■ Une démarche alternative

Considérons l'exemple suivant : on cherche à calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ en utilisant la suite de calculs suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^n dt \stackrel{?}{=} \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2.$$

Il nous faut justifier la deuxième égalité de ce calcul.

Essayons d'utiliser le théorème 3.2 en notant $f_n : t \mapsto (-1)^n t^n$ sur $I = [0, 1[$. L'hypothèse (i) est bien vérifiée, mais pas l'hypothèse (ii) car la série $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge. Dans ce cas, la solution consiste à utiliser le théorème 3.1 à la suite des restes. On écrit :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^N \int_0^1 (-1)^n t^n dt + \int_0^1 R_N(t) dt = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} + \int_0^1 R_N(t) dt \quad \text{avec } R_N(t) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n t^n.$$

D'après le critère spécial relatif aux séries alternées, $|R_N(t)| \leq t^{N+1} \leq 1$, ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence dominée : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 R_N(t) dt = \int_0^1 \lim_{N \rightarrow +\infty} R_N(t) dt = 0$ et ainsi conclure : $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

3.3 Intégrales dépendant d'un paramètre

Considérons maintenant une fonction à deux variables $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ soit continue par morceaux et intégrable sur I . On peut alors définir une application $g : J \rightarrow \mathbb{K}$ en posant :

$$\forall x \in J, \quad g(x) = \int_a^b f(x, t) dt.$$

La continuité de f vis-à-vis de sa variable x permet-elle d'en déduire celle de g ? La réponse est malheureusement négative. Considérons à cet effet l'application :

$$f : (x, t) \mapsto x e^{-tx} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt.$$

Pour tout $x \geq 0$, l'application $f(x, \cdot)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc g est bien définie.

Il est aisé de calculer : $g(0) = 0$ et $\forall x > 0$, $g(x) = 1$, aussi g est discontinue en 0 bien que f soit continue vis-à-vis de x .

Pour en déduire la continuité de la fonction g , il va donc être nécessaire d'avoir une hypothèse supplémentaire : ce sera une hypothèse de *domination*.

■ Continuité sous le signe intégral

THÉORÈME 3.3 — Soit $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction telle que :

- (i) pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux ;
- (ii) pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur J ;
- (iii) il existe une application ϕ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que :

$$\forall (x, t) \in J \times I, \quad |f(x, t)| \leq \phi(t) \quad (\text{hypothèse de domination}).$$

Alors l'application $g : J \rightarrow \mathbb{K}$ définie par : $\forall x \in J, g(x) = \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue en tout point de J .

Exemple. Rappelons que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est définie sur $]0, +\infty[$. Nous allons prouver qu'elle y est continue.

Commençons par écrire : $\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x)$, et notons $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$ on a : $\forall t \in]0, 1]$, $0 \leq t^{x-1} e^{-t} \leq t^{a-1} e^{-t} = \phi_1(t)$. L'application ϕ_1 est intégrable sur $]0, 1]$ et domine f , donc Γ_1 est continue sur $[a, +\infty[$, puis par recouvrement sur $]0, +\infty[$.

Soit $b > 0$. Pour tout $x \in]0, b]$ on a : $\forall t \in [1, +\infty[$, $0 \leq t^{x-1} e^{-t} \leq t^{b-1} e^{-t} = \phi_2(t)$. L'application ϕ_2 est intégrable sur $[1, +\infty[$ et domine f , donc Γ_2 est continue sur $]0, b]$, puis par recouvrement sur $]0, +\infty[$.

Γ est donc continue sur $]0, +\infty[$ comme somme de deux fonctions continues.

Remarque. Comme nous venons de le voir sur cet exemple, il est possible de procéder par recouvrement, en prouvant par exemple la continuité sur tout segment inclus dans I .

■ Dérivation sous le signe intégral

THÉORÈME 3.4 — Soit $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ une application vérifiant les hypothèses suivantes :

- (i) pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- (ii) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur J ;

- (iii) pour tout $x \in J$ la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
 (iv) il existe une application ϕ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que :

$$\forall (x, t) \in J \times I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \phi(t) \quad (\text{hypothèse de domination}).$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur J , et : $\forall x \in J, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Remarque. À l'instar de la continuité, il est fréquent d'avoir à procéder par recouvrement, par exemple en prouvant à l'aide de ce théorème que g est de classe \mathcal{C}^1 sur tout segment inclus dans J .

EXERCICE 18

On considère la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

- a. Montrer que g est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
 b. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et solution sur cet intervalle de l'équation différentielle :

$$y - y' = \sqrt{\frac{\pi}{4x}}.$$

Extension au cas des fonctions de classe \mathcal{C}^k

Enfin, nous admettrons l'extension de ce théorème, à l'instar du théorème équivalent pour les séries de fonctions :

PROPOSITION 3.5 — Soit $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ une application vérifiant les hypothèses suivantes :

- (i) pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
 (ii) pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^k sur J ;
 (iii) pour tout $x \in J$ et tout $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
 (iv) pour tout $x \in J$ la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
 (v) il existe une application ϕ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que :

$$\forall (x, t) \in J \times I, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \phi(t) \quad (\text{hypothèse de domination}).$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^k sur J , et : $\forall x \in J, \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, g^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) dt$.

■ Utiliser Python pour représenter une intégrale à paramètre

À titre d'exemple, définissons la fonction $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ en Python. On utilise la fonction `quad` du module `scipy.integrate`, qui autorise des bornes infinies :

```
from scipy.integrate import quad

def gamma(x):
    def f(t):
        return t**(x-1) * np.exp(-t)
    return quad(f, 0, np.inf)[0]
```

Une fois définie, elle peut être utilisée à l'instar des fonctions usuelles. Par exemple, pour en visualiser le graphe, on utilisera le script :

```
X = np.linspace(0.05, 5, 256)
Y = [gamma(x) for x in X]
plt.grid()
plt.plot(X, Y)
```

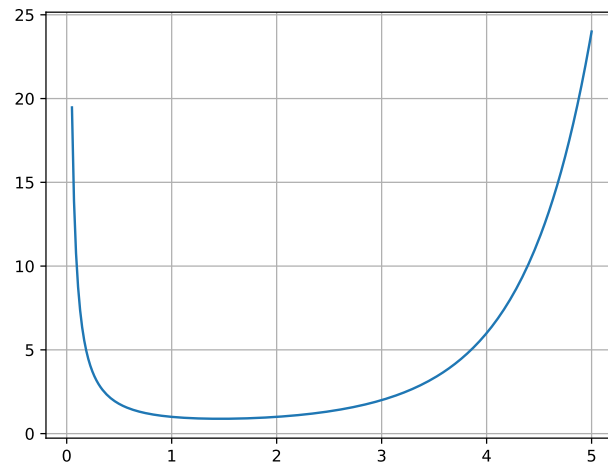


FIGURE 8 – Le graphe de la fonction Γ .