Chapitre VI
Séries entières

Les séries entières sont des séries numériques de la forme $\sum a_n z^n$, où (a_n) est une suite réelle ou complexe, et z un élément de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (la série est dite *entière* du fait qu'elle ne fait intervenir que des puissances entières). Ces séries possèdent des propriétés de convergence remarquables, que nous allons étudier dans la première partie. Dans un second temps, nous étudierons les propriétés de la fonction d'une *variable réelle* :

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

L'extension de ces propriétés au cas d'une variable complexe constitue la théorie des fonctions *analytiques*, le pilier central de l'analyse complexe.

1. Rayon de convergence

1.1 Définition d'une série entière

Définition. — *Étant donnée une suite (a_n) de nombres complexes, on appelle* série entière *la série de fonctions $\sum a_n z^n$ de la variable complexe z. Son* domaine de convergence *est l'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels cette série converge.*

Nous allons commencer par étudier le domaine de convergence d'une série entière dans un cas simple, en faisant deux hypothèses supplémentaires :

(i) il existe un rang N à partir duquel $a_n \neq 0$;

(ii) la suite $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ converge vers une limite $\ell > 0$.

L'objectif de ces deux hypothèses est de permettre l'application du critère de d'Alembert :

$$\text{si } u_n = |a_n z^n| \text{ alors } \frac{u_{n+1}}{u_n} = |z|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{ donc } \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell|z|.$$

Ainsi :

- si $|z| < \dfrac{1}{\ell}$, la série positive $\sum u_n$ converge donc la série $\sum a_n z^n$ converge absolument ;
- si $|z| > \dfrac{1}{\ell}$, la suite positive (u_n) diverge vers $+\infty$ donc la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

En posant $\mathrm{R} = \dfrac{1}{\ell}$ nous avons mis en évidence dans le plan complexe l'existence d'un disque $\mathcal{D}$ de centre 0 et de rayon R tel que :

- lorsque z est à l'intérieur du disque $\mathcal{D}$, la convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est absolue ;
- lorsque z est à l'extérieur du disque $\mathcal{D}$, la divergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est grossière ;
- lorsque z est sur le bord de $\mathcal{D}$ (c'est-à-dire $|z| = \mathrm{R}$) on ne peut pas conclure.

(illustration figure 1.)

Exemple. Considérons les trois séries entières $\sum z^n$, $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$ et $\sum \dfrac{z^n}{n}$. Elles vérifient toutes trois les hypothèses *(i)* et *(ii)* avec $\ell = 1$ donc dans les trois cas le disque $\mathcal{D}$ est de rayon $\mathrm{R} = 1$.

- Pour $|z| = 1$, la série $\sum z^n$ diverge (son terme général ne tend pas vers 0). Le domaine de convergence est le disque ouvert.

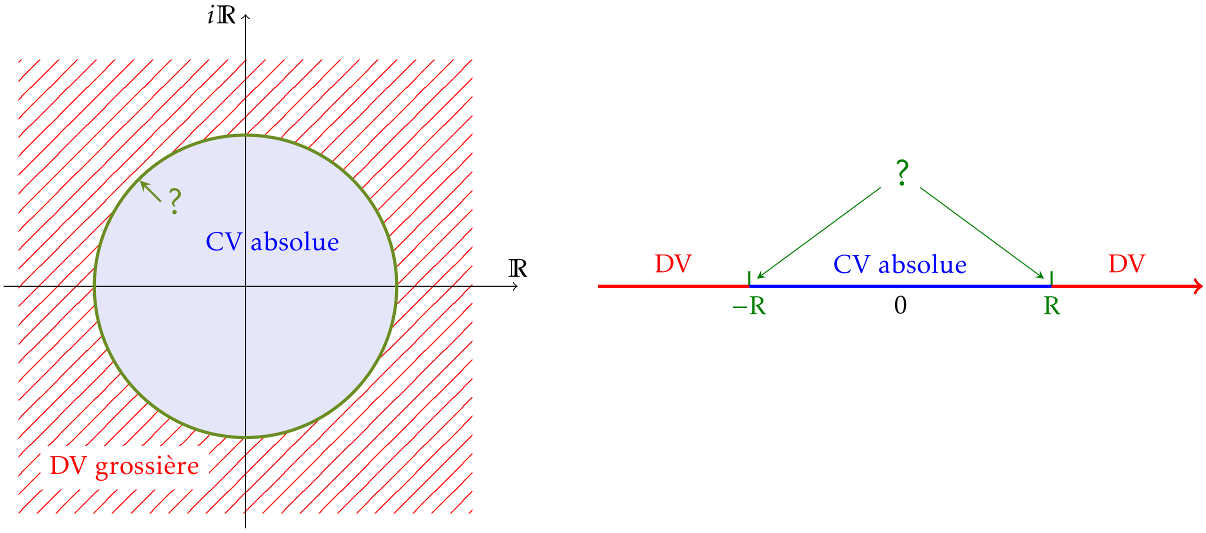

Figure 1 – Le disque de convergence et sa restriction au cas réel.

- Pour $|z| = 1$, la série $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge absolument car la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Son domaine de convergence est le disque fermé.
- Pour $z = 1$, la série $\sum \frac{z^n}{n}$ diverge, pour $z = -1$ la série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge (par application du critère spécial), et pour $|z| = 1$ et $z \neq \pm 1$ on ne sait pas étudier la convergence de la série. Le domaine de convergence est « entre » le disque ouvert et le disque fermé.

Ces trois exemples montrent qu'il n'y a pas à espérer une règle générale concernant les valeurs de z pour lesquelles $|z| = \mathrm{R}$.

Pour résumer, qu'avons-nous observé ?

> *lorsqu'une série entière vérifie les hypothèses (i) et (ii), il existe un disque $\mathcal{D}$ tel que la série converge absolument à l'intérieur de ce disque et diverge grossièrement à l'extérieur de ce disque.*

Nous allons maintenant montrer que nous pouvons nous affranchir des hypothèses *(i)* et *(ii)*, et que cette propriété est une propriété générale des séries entières.

1.2 Le lemme d'Abel

La généralisation du résultat que nous cherchons à obtenir repose sur le lemme suivant :

Lemme (Abel) — *Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$ la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*

Considérons alors l'ensemble $\mathcal{A} = \left\{\rho \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \text{la suite } (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\right\}$ et $\mathrm{R} = \sup \mathcal{A} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (autrement dit, on convient que si $\mathcal{A}$ n'est pas majoré alors $\mathrm{R} = +\infty$). On dispose du :

Théorème 1.1 — *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et $\mathrm{R} = \sup \mathcal{A}$. Alors :*

- *Si $\mathrm{R} = 0$, le domaine de convergence se réduit à $\{0\}$;*
- *si $\mathrm{R} = +\infty$, le domaine de convergence est égal à $\mathbb{C}$ tout entier ;*
- *si $0 < \mathrm{R} < +\infty$, on a :*
  - *lorsque $|z| < \mathrm{R}$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument ;*
  - *lorsque $|z| > \mathrm{R}$, la série $\sum a_n z^n$ diverge.*

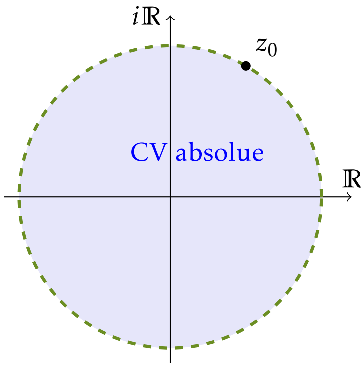

FIGURE 2 – Illustration du lemme d'Abel.

On appelle disque ouvert de convergence *le disque de centre* 0 *et de rayon* R. *Le réel* R *est le* rayon de convergence *de la série entière.*

Attention. Rappelons encore une fois qu'on ne peut rien dire *a priori* de la convergence sur le cercle de rayon R.

Exemple. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha z^n$ est égal à 1.

Exercice 1

On considère deux réels α et β vérifiant : $0 < \alpha < \beta$, ainsi que la suite (a_n) définie par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = \alpha^{2p} \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = \beta^{2p+1}.$$

Déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$ puis la valeur du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Remarque. Nous avons vu dans la section précédente que lorsque *certaines hypothèses sont réalisées* le critère de d'Alembert permet d'obtenir facilement la valeur du rayon de convergence. C'est le cas par exemple pour l'exercice suivant :

Exercice 2

À l'aide du critère de d'Alembert, déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{n^n}{n!} z^n$.

Cette démarche est séduisante car facile d'utilisation, mais il ne faut pas en faire une utilisation systématique, car les hypothèses nécessaires peuvent aisément être mises en défaut ! C'est par exemple le cas de l'exercice 1 : la suite $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ vaut $\beta\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{2p}$ lorsque $n = 2p$, et $\alpha\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2p+1}$ lorsque $n = 2p+1$, donc :

$$\lim_{+\infty}\left|\frac{a_{2p+1}}{a_{2p}}\right| = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{+\infty}\left|\frac{a_{2p+2}}{a_{2p+1}}\right| = 0.$$

La suite $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right|\right)$ ne possède donc pas de limite.
On s'autorisera néanmoins à utiliser directement le résultat suivant :

PROPOSITION 1.2 — *Soit (a_n) une suite numérique ne s'annulant pas, telle que le quotient $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ possède une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est égal à $\dfrac{1}{\ell}$ (avec la convention $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$).*

Exercice 3

Calculer à l'aide du critère de d'Alembert le rayon de convergence de $\sum \dfrac{(1+i)^n}{n} z^{3n}$.

■ Comparaison du rayon de convergence de deux série entières

Notons pour finir que la comparaison de l'ordre de grandeur des termes généraux à une conséquence sur les rayons de convergence :

Théorème 1.3 — *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, et telles que $a_n = O(b_n)$. Alors $R_a \geqslant R_b$.*

Corollaire — *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, et telles que $|a_n| \sim |b_n|$. Alors $R_a = R_b$.*

Exercice 4

Soit (a_n) une suite vérifiant : $\lim a_n = 0$. Que dire du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

1.3 Opérations algébriques sur les séries entières

■ Somme de deux séries entières

Théorème 1.4 — *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs. Alors le rayon de convergence de la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$, et :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad |z| < \min(R_a, R_b) \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

Remarque. Supposons $R_a < R_b$ et considérons $z \in \mathbb{C}$ tel que $R_a < |z| < R_b$. Alors $\sum a_n z^n$ diverge et $\sum b_n z^n$ converge donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge. Ceci prouve que $R \leqslant R_a = \min(R_a, R_b)$, et donc que lorsque $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.

■ Produit de deux séries entières

Considérons deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergences respectifs R_a et R_b. Le produit de Cauchy de ces deux séries a pour terme général :

$$\sum_{p+q=n} (a_p x^p)(b_q x^q) = \Big(\sum_{p+q=n} a_p b_q \Big) x^n$$

Il s'agit du terme général d'une série entière. En appliquant le théorème prouvé dans le chapitre consacré au séries numériques on obtient :

Théorème 1.5 — *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b. Alors la série entière $\sum \Big(\sum_{p+q=n} a_p b_q \Big) z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal au $\min(R_a, R_b)$. En outre, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$ on a : $\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \Big) \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{p+q=n} a_p b_q \Big) z^n$.*

Exercice 5

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R_a > 0$, et on définit la suite (b_n) en posant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Que dire du rayon de convergence R_b de la série entière $\sum b_n z^n$?
Donner une relation liant les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ au voisinage de 0.

■ Dérivation formelle

Terminons avec un résultat qui nous sera utile dans la suite de ce chapitre (pour prouver le théorème 2.2) :

Proposition 1.6 — *La série entière $\sum n a_n z^n$ a même rayon de convergence que la série $\sum a_n z^n$.*

2. Séries entières d'une variable réelle

Nous allons désormais considérer une suite réelle ou complexe (a_n) telle que la série entière $\sum a_n z^n$ ait un rayon de convergence $R > 0$; ceci permet de définir une fonction numérique $S :]-R, R[\to \mathbb{C}$ (éventuellement définie en $-R$ et en R) à l'aide de l'égalité : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
L'intervalle $]-R, R[$ sera appelé l'*intervalle ouvert de convergence* (sachant que S peut en outre être définie en $\pm R$).

2.1 Convergence normale

Théorème 2.1 — *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors la convergence est normale sur tout segment $[-r, r]$ avec $r < R$.*

Attention. Rappelons que ceci *ne signifie pas* qu'il y ait convergence normale (ou même uniforme) sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$. Il suffit de considérer la série $\sum x^n$ pour s'en convaincre.

Corollaire — *La fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence.*

Attention. Même si la fonction S est définie en $\pm R$, cela n'implique pas sa continuité en ces points.

2.2 Dérivation et intégration d'une série entière

Théorème 2.2 — *La fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$ et pour tout $x \in]-R, R[$, $S'(x) = \sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1}$.*

Exercice 6

Calculer sur l'intervalle ouvert de convergence la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$.

Corollaire — *La fonction S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-R, R[$, et les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $\boxed{a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}.}$

Cette dernière formule va avoir une conséquence importante :

Proposition 2.3 — *Deux séries entières dont les rayons de convergence sont non nuls ont des sommes égales si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux.*
En particulier, une série entière de rayon de convergence non nul aura une somme non identiquement nulle dès lors que l'un au moins de ses coefficients sera non nul.

En appliquant le théorème 2.2 à la série primitive, on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.4 — *La fonction* $T : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *définit l'unique primitive s'annulant en zéro de* S *sur l'intervalle* $]-R, R[$.

2.3 Développement en série entière

Considérons une fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle de définition.

Définition. — *On dit que* f *est* développable en série entière *au voisinage de* 0 *lorsqu'il existe une série entière* $\sum a_n z^n$ *de rayon de convergence* $R \geqslant r$ *telle que :*

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

D'après ce qui a été dit à la section précédente, si f est développable en série entière alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, mais ceci n'est pas suffisant pour assurer l'existence de ce développement. En revanche, cette formule nous permet d'affirmer que si un tel développement existe, *ce dernier est unique* et coïncide avec la série de Taylor de f.

Pour prouver qu'une fonction est développable en série entière, différentes possibilités s'offrent à nous : une méthode fréquemment utilisée consiste à considérer un problème de Cauchy dont la fonction f est l'unique solution, et à déterminer les solutions de ce système qui peuvent s'écrire sous forme d'une somme de série entière. C'est ce que nous ferons pour déterminer le développement en série entière des fonctions exponentielle et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Une autre possibilité consiste à effectuer des manipulations à base de somme ou de produit de séries usuelles (par exemple pour obtenir le développement des fonctions trigonométriques) ou encore en utilisant les propriétés d'intégration et de dérivation des développements usuels ; nous procéderons par exemple ainsi pour obtenir les développements des fonctions $x \mapsto \arctan x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.

■ Développements usuels

La fonction exponentielle
Nous admettrons que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $f : x \mapsto e^{\alpha x}$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(x) = \alpha y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Cherchons une solution de ce problème sous forme d'une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$:
y est solution si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall x \in]-R, R[, \ \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ a_0 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in]-R, R[, \ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ (n+1) a_{n+1} = \alpha a_n \\ a_0 = 1 \end{cases} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = \frac{\alpha^n}{n!}.$$

Le critère de d'Alembert nous permet de déterminer que cette série entière a un rayon de convergence infini, ce qui permet de conclure, en invoquant l'unicité de la solution d'u problème de Cauchy : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^n$.

En prenant $\alpha = 1$ puis $\alpha = -1$ on obtient en particulier :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n.}$$

Les fonctions trigonométriques

Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ on en déduit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad \operatorname{ch} x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad \operatorname{sh} x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.}$$

En prenant cette fois $\alpha = i$ puis $\alpha = -i$, on obtient de même :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad \sin x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}.}$$

Les sommes géométriques

La formule déjà connue de sommation des sommes géométriques donne :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in]-1,1[,\quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n}$$

On en déduit en intégrant :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in]-1,1[,\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n}$$

et enfin :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\quad \arctan x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{2p+1}.}$$

La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Enfin, pour obtenir le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{C}$) nous allons de nouveau admettre que cette fonction est l'unique solution sur l'intervalle $]-1,1[$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (1+x)y'(x) = \alpha y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 7

Chercher l'unique série entière qui soit solution de ce problème de Cauchy sur l'intervalle $]-1,1[$, calculer son rayon de convergence, et en déduire la formule ci-dessous.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n} \quad \text{en ayant noté } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Attention. Malgré les apparences il ne s'agit pas ici d'un coefficient binomial puisqu'en général α n'est pas un nombre entier. Lorsque vous utilisez cette notation, il faut prendre garde à ne pas appliquer la fonction factorielle à des arguments non entiers.

Exercice 8

À l'aide de cette formule, obtenir le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

Remarque. Les formules que nous venons d'établir ne vous sont pas inconnues : elles coïncident avec les développements limités usuels appris en première année. Ce n'est pas étonnant puisque série de Taylor et polynômes de Taylor partagent les mêmes coefficients. D'ailleurs, les développements limités peuvent être établis à partir du développement en série entière en utilisant le résultat ci-dessous.

Proposition 2.5 — *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et S sa fonction somme. Alors S admet pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ un développement limité d'ordre n en zéro donné par :*

$$S(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

2.4 Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Le cours de première année a défini l'exponentielle d'un nombre complexe : si $z = x+iy \in C$, alors $\exp(z)$ (ou e^z) $= e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. À la section précédente nous avons obtenu un développement de $e^{\alpha x}$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$. En posant $\alpha = z$ et $x = 1$ on obtient :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.}$$

Il est intéressant d'observer que la propriété fondamendale de la fonction exponentielle, à savoir : $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z+z') = \exp(z) \times \exp(z')$ peut être prouvée à partir de cette expression. En effet, la convergence absolue de cette série autorise un produit de Cauchy :

$$e^z \times e^{z'} = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^p}{p!}\Big)\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{z'^q}{q!}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{n}\Big(\frac{1}{p!} \times \frac{1}{(n-p)!} z^p z'^{n-p}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^p z'^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(z+z')^n = e^{z+z'}.$$

Similairement, les sommes géométriques étudiées en première année fournissent un deuxième exemple de fonction définie sur une partie du plan complexe et développables en série entière :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1 \Longrightarrow \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.}$$

Notons que les différents développement en série entière des fonctions réelles que nous avons obtenus pourraient être utilisés pour prolonger les fonctions correspondantes dans le plan complexe (ou le disque unité suivant les cas), mais nous ne nous aventurerons pas plus loin dans cette direction. Nous nous contenterons d'admettre le résultat suivant :

Proposition 2.6 — *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $S(z)$. Alors la fonction S est continue sur le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.*