

Chapitre VI

Espaces vectoriels normés

Au tournant du XX^e siècle, les travaux de Hilbert et de Banach relatifs aux espaces de fonctions étendent la notion de limite, initialement restreinte aux suites et fonctions réelles, à un cadre plus vaste : les *espaces vectoriels normés*, ouvrant ainsi la porte à l'*analyse fonctionnelle*, notion maintenant omniprésente dans toutes les branches des mathématiques.

1. Espaces vectoriels normés

1.1 Normes et distances

En géométrie, la *norme* est une extension de la valeur absolue des nombres aux vecteurs. Elle permet de mesurer la *longueur* d'un vecteur, mais définit aussi, nous le verrons, une *distance* entre deux vecteurs. Cette distance nous permettra de définir la notion de suite convergente, puis de limite d'une fonction à valeurs vectorielles.

Dans tout le chapitre, E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

DÉFINITION. — On appelle *norme* sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

(i) $N(x) = 0 \iff x = 0_E$;

(ii) pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$;

(iii) pour tout $(x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

On appelle *espace vectoriel normé* tout *espace vectoriel muni d'une norme*.

En général, on conviendra d'utiliser la notation usuelle $N(x) = \|x\|$.

PROPOSITION 1.1 (seconde inégalité triangulaire) — Pour tout $(x, y) \in E^2$, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Remarque. Le terme de *norme* ne vous est pas inconnu : à tout produit scalaire défini sur un espace vectoriel réel est associée une norme définie par : $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$. On vérifie que ce type de norme respecte la définition que nous venons de donner, la seule difficulté venant de l'inégalité triangulaire, qui est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir encadré).

Mais attention : dans le cas général une norme n'est pas forcément issue d'un produit scalaire. Celles qui le sont seront dites *euclidiennes*, pour les distinguer du cas général.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Si E est un *espace euclidien*, alors pour tout $(x, y) \in E^2$, $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

De cette inégalité résulte l'inégalité triangulaire pour une norme euclidienne :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y | x + y \rangle = \langle x | x \rangle + 2\langle x | y \rangle + \langle y | y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Exemples. Lorsque $E = \mathbb{R}^p$ on utilise souvent l'une des normes suivantes : si $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|) \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^p |x_k| \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^p x_k^2 \right)^{1/2}$$

Remarquons que les deux premières normes peuvent être aussi définies sur \mathbb{C}^p .

Exemple. Sur l'espace $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ des fonctions bornées de I dans \mathbb{R} , la norme infinie $\|\cdot\|_{\infty, I}$ est bien entendu une norme.

EXERCICE 1

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$.

Montrer que l'on définit ainsi une norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (appelée *norme de Frobenius*), norme qui vérifie en plus la propriété :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|.$$

■ Distance entre deux vecteurs

DÉFINITION. — Lorsque E est un espace vectoriel normé et $(x, y) \in E^2$, on appelle *distance entre x et y* le réel $d(x, y) = \|y - x\|$.

Cette notion de distance est importante; c'est elle qui nous permettra de généraliser en dimension supérieure les notions d'analyse que sont la convergence des suites, la continuité des fonctions, ...

À chaque norme est associé une distance différente, mais toutes les distances ont en commun les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1.2 — Si d est une distance de E , alors :

- $\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation);
- $\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie);
- $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

DÉFINITION. — On appelle *sphère de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$* l'ensemble des vecteurs $x \in E$ vérifiant : $d(a, x) = r$. Autrement dit,

$$S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}.$$

EXERCICE 2

Dessiner la sphère unité (c'est-à-dire la sphère de centre 0_E de rayon 1) pour chacune des trois normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ dans \mathbb{R}^2 .

Par analogie aux intervalles ouverts et fermés de \mathbb{R} , on adopte en outre les définitions suivantes :

DÉFINITION. — On appelle *boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$* l'ensemble des vecteurs $x \in E$ vérifiant : $d(a, x) < r$. Autrement dit,

$$\mathring{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}.$$

On appelle *boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$* l'ensemble des vecteurs $x \in E$ vérifiant : $d(a, x) \leq r$. Autrement dit,

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}.$$

Remarque. Les intervalles sont les seules parties *convexes* de \mathbb{R} , c'est-à-dire vérifiant la propriété :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{A}^2, \quad [a, b] \subset \mathbb{A}.$$

Dans le cas d'un espace vectoriel, on définit la notion de segment en posant :

$$\forall (a, b) \in E^2, \quad [a, b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$$

On peut dès lors définir la notion de *convexité* dans un espace vectoriel :

DÉFINITION. — Une partie A d'un espace vectoriel (normé) E est dite *convexe* lorsque :

$$\forall (a, b) \in A^2, \quad [a, b] \subset A.$$

PROPOSITION 1.3 — Les boules ouvertes et les boules fermées sont des parties convexes d'un espace vectoriel normé.

C'est notion de boule permet d'étendre certaines propriétés topologiques de \mathbb{R} au cas d'un espace vectoriel normé. Prenons par exemple la notion de partie bornée. Dans le cas réel, une partie bornée est définie ainsi : « une partie A de \mathbb{R} est dite bornée lorsqu'il existe un réel $M > 0$ tel que $A \subset [-M, M]$ ». Dans le cadre des espaces vectoriels normés, cette définition devient :

DÉFINITION. — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\|\cdot\|$. Une partie A de E est dite bornée lorsqu'il existe $M > 0$ tel que $A \subset \overline{B}(0_E, M)$, autrement dit tel que : $\forall x \in A, \|x\| \leq M$.

Normes équivalentes

Nous avons vu dans l'exercice 2 que la forme des boules dépend de la norme choisie, en conséquence de quoi la notion de partie bornée dépend *a priori* du choix de la norme. Cependant, on peut constater que dans \mathbb{R}^2 et pour les trois normes que nous avons pris en exemple, ce n'est pas le cas : si une partie A est bornée pour une de ces trois norme, elle le sera pour les deux autres (illustration figure 1).

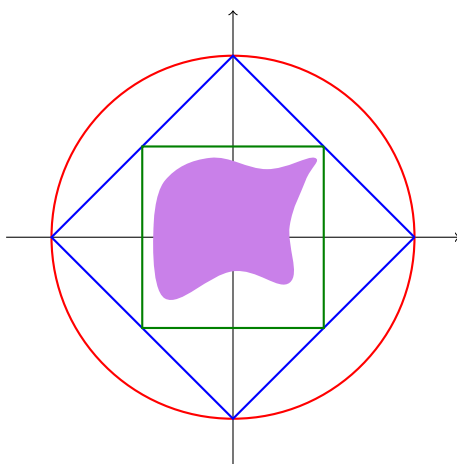


FIGURE 1 – Une partie bornée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ l'est aussi pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Cette propriété résulte des inégalités suivantes. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

- $\|x\|_1 \leq 2\|x\|_\infty$ donc toute partie bornée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ l'est aussi pour la norme $\|\cdot\|_1$;
- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ donc toute partie bornée pour la norme $\|\cdot\|_1$ l'est aussi pour la norme $\|\cdot\|_\infty$;

Et de même,

- $\|x\|_2 \leq \sqrt{2}\|x\|_\infty$ donc toute partie bornée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ l'est aussi pour la norme $\|\cdot\|_2$;
- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ donc toute partie bornée pour la norme $\|\cdot\|_2$ l'est aussi pour la norme $\|\cdot\|_\infty$;

DÉFINITION. (hors programme) — Deux normes N_1 et N_2 sont dites équivalentes lorsqu'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que pour tout $x \in E$, $N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$ et $N_2(x) \leq \beta N_1(x)$.

PROPOSITION 1.4 — Si deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes, toute partie bornée pour l'une de ces deux normes l'est aussi pour l'autre.

Nous admettrons le résultat notable suivant :

THÉORÈME 1.5 — Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

avec pour conséquence immédiate :

COROLLAIRE — Dans un espace vectoriel de dimension finie, la notion de partie bornée est indépendante du choix de la norme.

Attention. On prendra bien garde au fait que l'équivalence des normes n'est valable qu'en dimension finie. Cette hypothèse est primordiale, et a pour conséquence que les différentes notions d'analyse réelle qu'on prolonge au

cas d'un espace vectoriel de dimension finie (à commencer par la convergence des suites au paragraphe suivant) ne dépendent pas du choix de la norme utilisée. En revanche, ce théorème est mis en défaut en dimension infinie, avec pour conséquence que dans ces espaces une partie peut être bornée pour une certaine norme, et pas pour d'autres.

1.2 Normes d'opérateurs (notion hors programme)

On appelle *norme matricielle* toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie en plus la propriété :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Nous avons montré dans l'exercice 1 que la norme euclidienne canonique (la norme de Frobenius) vérifie cette propriété.

Il existe une autre façon de définir une norme matricielle, en interprétant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme un endomorphisme de \mathbb{K}^n : à partir d'une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{K}^n on définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la norme :

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Une telle norme est appelée une *norme d'opérateur*, puisqu'on interprète A comme un opérateur linéaire de \mathbb{K}^n dans lui-même. Certains auteurs parlent de *norme subordonnée* (au choix de la norme sur \mathbb{K}^n).

PROPOSITION 1.6 — L'application $A \mapsto \|A\|$ définit une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque. Une norme d'opérateur vérifie toujours $\|I_n\| = 1$, ce qui montre que la norme de Frobenius, bien que norme matricielle, n'est pas une norme d'opérateur.

Exemple. La norme d'opérateur associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ de \mathbb{K}^n est définie par : $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

1.3 Suites dans un espace vectoriel normé

DÉFINITION. — On dit qu'une suite (u_n) d'éléments d'un espace vectoriel normé E converge vers $\ell \in E$ lorsque la distance de u_n à ℓ tend vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - \ell\| = 0$.

Géométriquement, cette dernière propriété se traduit ainsi : pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans la boule fermée de centre ℓ de rayon ϵ .

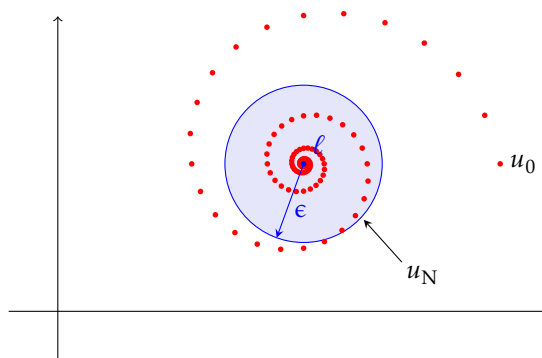


FIGURE 2 – À partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (u_n) sont dans $B(\ell, \epsilon)$.

EXERCICE 3

Soit E un espace vectoriel normé, et (u_n) une suite de vecteurs de E qui converge vers $\ell \in E$. Prouver les propriétés suivantes :

- la suite réelle $(\|u_n\|)$ converge vers $\|\ell\|$;
- la suite (u_n) est bornée.

Remarque. la définition de la convergence dépend *a priori* du choix de la norme utilisée. Cependant, si deux normes sont équivalentes, la convergence pour l'une est équivalente à la convergence pour l'autre. Compte tenu du théorème 1.5, on en déduit :

THÉORÈME 1.7 — Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, la convergence d'une suite et la valeur de la limite ne dépendent pas du choix de la norme.

Remarque. Ce théorème le suggère en creux : en dimension infinie, la notion de convergence dépend du choix de la norme. Et en effet, il est possible de donner des exemples de suites en dimension infinie qui vont converger pour une norme et diverger pour l'autre, voire des exemples de suites qui convergent vers des limites différentes suivant le choix de la norme !

PROPOSITION 1.8 — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, (e_1, \dots, e_p) une base de E , (u_n) une suite de vecteurs et $\ell \in E$ un vecteur. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^p u_{n,k} e_k \quad \text{et} \quad \ell = \sum_{k=1}^p \ell_k e_k.$$

Alors (u_n) converge vers ℓ si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la suite $(u_{n,k})$ converge vers ℓ_k .

Autrement dit, en dimension finie l'étude de la convergence d'une suite se ramène à celle de ses coordonnées dans une base.

EXERCICE 4

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que la suite (A^n) converge vers une matrice L . Montrer que L est une matrice de projection.

2. Topologie d'un espace vectoriel normé

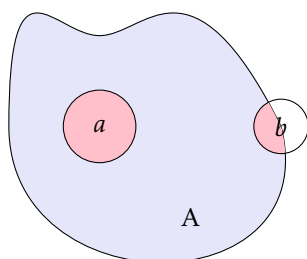
Dans toute cette partie, nous considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^p$ muni d'une norme notée $\|\cdot\|$ et nous admettrons que les résultats ici énoncés ne dépendent pas du choix de cette norme. Nous admettrons aussi que cette étude topologique s'étend à tout espace vectoriel normé de dimension finie.

2.1 Ouverts et fermés

Un ensemble *ouvert*, aussi appelé une partie ouverte ou, plus fréquemment, un ouvert, est, de manière informelle, une partie \mathcal{O} de E qui possède la propriété suivante : si a appartient à cet ensemble, \mathcal{O} contiendra aussi tous les points suffisamment proches de a . Quant aux fermés, même si nous ne les définirons pas ainsi, nous verrons qu'il s'agit des parties complémentaires des ouverts.

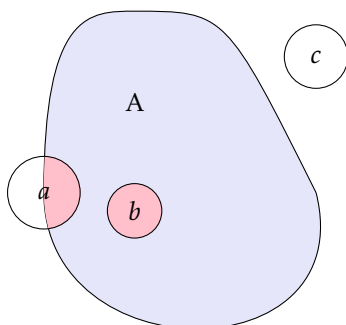
C'est la notion de boule, que nous avons déjà rencontrée, qui permet de définir la notion de *proximité*, ou encore de *voisinage*, dont nous avons besoin pour définir les ouverts.

DÉFINITION. — Soit A une partie de E , et a un point de A . Lorsque A contient une boule (ouverte ou fermée) centrée en a , on dit que a est intérieur à A .



Le point a est intérieur à A , mais pas le point b : quel que soit le rayon de la boule centrée en b , celle-ci ne sera pas incluse dans A .

DÉFINITION. — Un élément $a \in E$ est dit adhérent à une partie A de E lorsque toute boule (ouverte ou fermée) centrée en a contient au moins un point de A : $\forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset$.



Les points a et b sont adhérents à A , mais pas le point c .

Remarque. Tout point de A est bien entendu adhérent à A .

THÉORÈME 2.1 (caractérisation séquentielle) — Un point $a \in E$ est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers a .

EXERCICE 5

Soit A une partie de E et $x \in E$. On pose $d(x, A) = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}$. Montrer que x est adhérent à A si et seulement si $d(x, A) = 0$.

■ Intérieur, adhérence et frontière

DÉFINITION. — Lorsque A est une partie quelconque de E , on appelle

- intérieur de A l'ensemble $\overset{\circ}{A}$ des points intérieurs à A ;
- adhérence de A l'ensemble \overline{A} des points adhérents à A ;
- frontière de A l'ensemble $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Exemple. Si A est une boule (ouverte ou fermée) de centre a de rayon r , $\overset{\circ}{A}$ est la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(a, r)$, \overline{A} est la boule fermée $\overline{B}(a, r)$, $\text{Fr}(A)$ est la sphère $S(a, r)$.

Exemples. L'adhérence de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} est égal à \mathbb{R} car tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels. L'intérieur de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} est égal à l'ensemble vide car toute boule de rayon $r > 0$ contient des irrationnels.

■ Ouverts et fermés

DÉFINITION. — Une partie \mathcal{O} de E est dite ouverte lorsque tous ses points sont intérieurs, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathcal{O}, \quad \exists r > 0 \mid B(x, r) \subset \mathcal{O}.$$

Autrement dit, un ouvert est une partie égale à son intérieur.

Exemples.

- Les intervalles ouverts sont des ouverts de \mathbb{R} ;
- toute boule ouverte est un ouvert;
- \emptyset et E sont des ouverts;
- l'intersection ou la réunion de deux ouverts est un ouvert.

DÉFINITION. — Une partie \mathcal{F} de E est dite fermée lorsque tout point adhérent à \mathcal{F} appartient à \mathcal{F} , soit encore lorsque toute suite d'éléments de \mathcal{F} convergeant dans E a sa limite dans \mathcal{F} .

Autrement dit, un fermé est une partie égale à son adhérence.

Exemple.

- Les intervalles fermés de \mathbb{R} sont des fermés ;
- toute boule fermée est un fermé ;
- toute sphère $S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$ est un fermé ;
- \emptyset et E sont des fermés ;
- la réunion ou l'intersection de deux fermés est un fermé.

PROPOSITION 2.2 — Dans un espace vectoriel de dimension finie, les sous-espaces vectoriels de E sont des fermés.

Enfin, le résultat qui suit établit que les notions d'ouvert et de fermé sont indissociables :

THÉORÈME 2.3 — Une partie \mathcal{F} de E est fermée si et seulement si la partie complémentaire $\mathcal{O} = E \setminus \mathcal{F}$ est ouverte.

EXERCICE 6

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E .

- a. Montrer que A est ouvert si et seulement si $A \cap \text{Fr}(A) = \emptyset$;
- b. Montrer que A est fermé si et seulement si $\text{Fr}(A) \subset A$.

2.2 Limite et continuité

Dans cette section, E et F désignerons deux \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimensions finies, la norme étant notée $\|\cdot\|$ indépendamment de l'espace.

\mathcal{U} désignera une partie de E , et $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une fonction.

■ Étude locale d'une application

DÉFINITION. — Si a désigne un point de E adhérent à \mathcal{U} , on dit que $f(x)$ admet $\ell \in F$ pour limite lorsque x tend vers a lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in \mathcal{U}, \quad \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \epsilon.$$

On notera dans ce cas : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

L'existence d'une limite, et la valeur de cette limite, sont des notions qui ne dépendent pas des normes utilisées si on remplace une norme par une norme équivalente, ce qui est toujours le cas en dimension finie.

Les théorèmes généraux relatifs aux opérations algébriques sur les limites se généralisent sans peine, ainsi que celui relatif à la limite d'une application composée.

Enfin, on peut faire le lien avec les suites de vecteurs :

THÉORÈME 2.4 (caractérisation séquentielle) — $f(x)$ admet ℓ pour limite lorsque x tend vers a si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de \mathcal{U} qui converge vers a , la suite $(f(a_n))$ converge vers ℓ .

Ce résultat, associé à la proposition 1.8, permet d'en déduire le

COROLLAIRE — $f(x)$ admet ℓ pour limite si et seulement si chacune des composantes de $f(x)$ dans une base arbitraire de E admet pour limite la composante de ℓ dans cette même base.

■ Relations de comparaison

Soit a un point adhérent à \mathcal{U} , et $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles ne s'annulant pas en dehors de a .

On dit que f est dominée par ϕ au voisinage de a lorsque f/ϕ est bornée au voisinage de a ; on note alors $f(x) = O_a(\phi(x))$.

On dit que f est négligeable devant ϕ au voisinage de a lorsque $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = 0$; on note alors : $f(x) = o_a(\phi(x))$.

Exemples. $f(x) = O(1)$ traduit le fait que f est bornée au voisinage de a .

$f(x) = \ell + o(1)$ traduit le fait que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

■ Continuité

DÉFINITION. — f est dite continue en $a \in \mathcal{U}$ lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, autrement dit lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in \mathcal{U}, \quad \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \epsilon.$$

On notera que la décomposition dans une base de F permet de ramener l'étude de la continuité à des fonctions à valeurs réelles : si (e_1, \dots, e_n) est une base de F et $f = f_1 e_1 + \dots + f_n e_n$, f est continue en a si et seulement si les fonctions à valeurs réelles f_1, \dots, f_n sont continues en a .

Continuité sur une partie

Une fonction $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ est dite continue sur \mathcal{U} lorsque f est continue en tout point de \mathcal{U} . Bien entendu les propriétés usuelles de la continuité (opérations algébriques, composition, ...) se prolongent sans réelle modification au cas des espaces vectoriels normés.

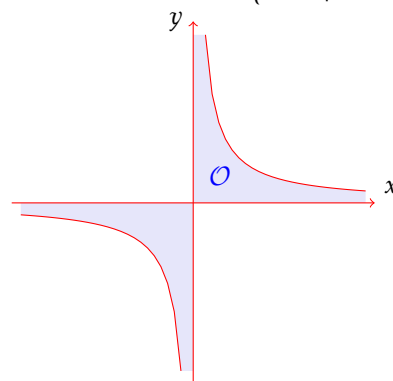
THÉORÈME 2.5 — On considère une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs réelles ou complexes.

- Si \mathcal{O} désigne une partie ouverte de \mathbb{R} , alors : $f^{-1}(\mathcal{O}) = \{x \in E \mid f(x) \in \mathcal{O}\}$ est un ouvert de E .
- Si \mathcal{F} désigne une partie fermée de \mathbb{R} , alors : $f^{-1}(\mathcal{F}) = \{x \in E \mid f(x) \in \mathcal{F}\}$ est un fermé de E .

Ce résultat permet en particulier de donner des exemples simples de parties ouvertes ou fermées. Par exemple, si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, et $\alpha \in \mathbb{R}$, la partie $\{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$ est ouverte et les parties $\{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\}$ et $\{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$ fermées.

Exemple. L'ensemble $\mathcal{O} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < xy < 1\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

En effet, l'application $\begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{pmatrix}$ est continue et $]0, 1[$ est un ouvert de \mathbb{R} .



EXERCICE 7

Soit $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}$. Montrer que A est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Nous avons vu que les parties ouvertes possédaient un certain nombre de propriétés communes avec les intervalles ouverts ; il en est de même des parties fermées et des intervalles fermés.

De la même façon, les parties fermées et bornées possèdent des propriétés communes avec les segments, notamment le résultat suivant, que nous admettrons :

THÉORÈME 2.6 — Soit \mathcal{K} une partie fermée et bornée d'un \mathbb{K} -espace vectoriel normé E de dimension finie, et $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

■ Fonctions lipschitziennes

Une application lipschitzienne est une application possédant une propriété de régularité plus forte que la continuité.

DÉFINITION. — Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés, \mathcal{U} une partie de E , et $k > 0$. Une application $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ est dite k -lipschitzienne lorsque :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}^2, \quad \|f(y) - f(x)\| \leq k\|y - x\|.$$

THÉORÈME 2.7 — Toute application lipschitzienne est continue sur son ensemble de définition.

Exemple. La seconde inégalité triangulaire : $\left| \|y\| - \|x\| \right| \leq \|y - x\|$ traduit le fait que l'application $x \mapsto \|x\|$ est une application 1-lipschitzienne de E ; il s'agit donc d'une application continue.

2.3 Le cas des applications linéaires

Parmi les applications d'un espace vectoriel vers un autre se trouve en particulier les applications linéaires. Il est légitime de se poser la question de leur continuité. Cette section y répond, en montrant mieux : toute application linéaire est, en dimension finie, lipschitzienne.

Mais tout d'abord, constatons que la définition de cette notion se simplifie dans le cas d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$: en effet, u est k -lipschitzienne si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \forall (x, y) \in E^2, \quad \|u(y) - u(x)\| \leq k\|y - x\| \\ \iff & \forall (x, y) \in E^2, \quad \|u(y - x)\| \leq k\|y - x\| \\ \iff & \forall z \in E, \quad \|u(z)\| \leq k\|z\| \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant démontrer le :

THÉORÈME 2.8 — Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est lipschitzienne, et donc continue.

■ Applications bilinéaires

Pour finir, un bref mot sur les applications bilinéaires, qui, de manière analogue aux applications linéaires, sont des applications continues en dimension finie.

LEMME — Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés de dimensions finies, et $B : E \times F \rightarrow G$ une forme bilinéaire. Alors il existe une constante k telle que :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad \|B(x, y)\| \leq k\|x\| \cdot \|y\|.$$

PROPOSITION 2.9 — Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés de dimensions finies, et $B : E \times F \rightarrow G$ une forme bilinéaire. Alors B est continue.

Exemple. Si E est un espace euclidien, l'application $(x, y) \rightarrow \langle x | y \rangle$ est une application continue.

3. Fonctions vectorielles

Dans cette dernière partie, nous allons restreindre l'espace de départ à un intervalle I de \mathbb{R} . Ainsi, nous allons nous intéresser plus spécifiquement aux fonctions $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$, où E est un espace vectoriel normé. De telles fonctions sont appelées des *fonctions vectorielles*, et cette restriction va nous permettre d'étendre le concept de dérivabilité à de telles fonctions.

3.1 Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

DÉFINITION. — On dit qu'une fonction vectorielle $f : I \rightarrow E$ admet une dérivée en $t_0 \in I$ lorsqu'il existe un vecteur $\ell \in E$ tel que : $\ell = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$. On pose alors $f'(t_0) = \ell$.

On a bien entendu de manière équivalente : $f'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$.

Les notations de Landau permettent enfin d'exprimer cette définition de la manière suivante : f admet ℓ pour dérivée en $t_0 \in I$ lorsque : $f(t) \underset{t_0}{=} f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + o(t - t_0)$.

PROPOSITION 3.1 — Si f est dérivable en t_0 , alors f est continue en t_0 .

Tout comme la continuité, le recours aux fonctions composantes permet de ramener la dérivation d'une fonction vectorielle à la dérivation des fonctions à valeurs numériques :

PROPOSITION 3.2 — Soit (e_1, \dots, e_p) une base de E , et f_1, \dots, f_p les fonctions coordonnées de f dans cette base. Alors f est dérivable en t_0 si et seulement si les fonctions f_1, \dots, f_p le sont, et dans ce cas :

$$f'(t_0) = f'_1(t_0)e_1 + \dots + f'_p(t_0)e_p.$$

Exemples.

- Une fonction à valeurs complexes $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en t_0 si et seulement si les fonctions $\Re f$ et $\Im f$ le sont.
- En cinématique, on obtient les composantes dans une base quelconque du vecteur accélération en dérivant les composantes du vecteur vitesse¹.

PROPOSITION 3.3 — Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction dérivable en t_0 , et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Alors $u(f)$ est dérivable en t_0 , et $u(f)'(t_0) = u(f'(t_0))$.

De manière analogue, on peut démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 3.4 — Soient $f : I \rightarrow E$ et $g : I \rightarrow F$ deux applications vectorielles dérivables en t_0 , et $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire. Alors $B(f, g)$ est dérivable en t_0 , et :

$$B(f, g)'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0))$$

Exemple. Cette formule généralise bien entendu la formule de dérivation d'un produit fg de deux fonctions à valeurs numériques, mais s'utilise aussi pour dériver une expression faisant intervenir un produit scalaire :

lorsque B est un produit scalaire, on a : $\langle f | g \rangle'(t_0) = \langle f'(t_0) | g(t_0) \rangle + \langle f(t_0) | g'(t_0) \rangle$.

EXERCICE 8

Soit E un espace euclidien et $f : I \rightarrow E$ une fonction vectorielle dérivable en tout point de I , et telle que $\forall t \in I$, $\|f(t)\| = 1$. Montrer que pour tout $t \in I$, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

Remarque. On peut encore généraliser cette formule au cas d'une application n -linéaire, ce qui est le cas en particulier du déterminant. Ainsi, si f_1, \dots, f_p sont des fonctions définies de I dans E et dérivables en t_0 et (e) une base de E , l'application $\phi : t \mapsto \det_e(f_1(t), \dots, f_p(t))$ est dérivable en t_0 , et :

$$\phi'(t_0) = \sum_{k=1}^p \det_e(f_1(t_0), \dots, f_{k-1}(t_0), f'_k(t_0), f_{k+1}(t_0), \dots, f_p(t_0)).$$

EXERCICE 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \det(I_n + tA)$. Justifier que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$.

Enfin, concernant la composée, nous avons :

PROPOSITION 3.5 — Soit I et J deux intervalles, $t_0 \in I$, $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en t_0 tel que $\phi(I) \subset J$, et $f : J \rightarrow E$ une fonction vectorielle dérivable en $\phi(t_0)$. Alors $f \circ \phi$ est dérivable en t_0 , et :

$$(f \circ \phi)'(t_0) = \phi'(t_0) \times f'(\phi(t_0)).$$

1. Il faut bien entendu que la base ne soit pas mobile, c'est-à-dire que les vecteurs qui la composent soient indépendants du temps.

■ Fonction dérivée

DÉFINITION. — Lorsque f est dérivable en tout point de I , on définit une fonction $f' : I \rightarrow E$, appelée fonction dérivée de f . Si f' est à son tour dérivable, on note f'' (ou $f^{(2)}$) sa dérivée, et plus généralement : on note $f^{(0)} = f$, et si $f^{(n)}$ est dérivable, on note $f^{(n+1)}$ sa dérivée.

On pourra aussi noter $D(f)$ ou $\frac{df}{dt}$ en lieu et en place de f' , et $D^k(f)$ ou $\frac{d^k f}{dt^k}$ pour $f^{(k)}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}^n(I, E)$ l'ensemble des fonctions f n fois dérivables sur I , telles que $f^{(n)}$ soit continue. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathcal{C}^{n+1}(I, E) \subset \mathcal{C}^n(I, E)$. On pose $\mathcal{C}^\infty(I, E) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I, E)$.

THÉORÈME 3.6 — Si f et g sont des fonctions vectorielles de classe \mathcal{C}^n sur I et B une forme bilinéaire, $B(f, g)$ est aussi de classe \mathcal{C}^n , et :

$$B(f, g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-k)}).$$

PROPOSITION 3.7 — Soit I et J deux intervalles, $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe \mathcal{C}^n telle que $\phi(I) \subset J$, et $f : J \rightarrow E$ une fonction vectorielle de classe \mathcal{C}^n . Alors la fonction vectorielle $f \circ \phi : I \rightarrow E$ est aussi de classe \mathcal{C}^n .

3.2 Arcs paramétrés

En géométrie, le concept assez vague de courbe désigne certains sous-ensembles du plan ou de l'espace usuels. C'est pour donner corps à ce concept qu'on introduit la notion plus précise d'*arc paramétré*, qui s'inspire de la cinématique. D'autres approches possibles de la notion de courbe, notamment les définitions implicites des *lignes de niveau*, seront évoquées dans le chapitre dédié au calcul différentiel.

On appelle *arc paramétré plan* de classe \mathcal{C}^n un couple (I, f) , où I est un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle de classe \mathcal{C}^n .

Remarque. Une fois \mathbb{R}^2 muni de sa structure affine naturelle, on note $M(t)$ le point défini par la relation : $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)$. On peut alors donner une interprétation cinématique de cet arc paramétré en le voyant comme la *trajectoire* du point $M(t)$ au cours du temps.

Le vecteur *vitesse* sera alors noté $f'(t)$, ou encore $\frac{dM}{dt}$, et le vecteur *accélération*, $f''(t)$ ou $\frac{d^2M}{dt^2}$.

EXERCICE 10

Soit (I, f) un arc paramétré régulier de classe \mathcal{C}^1 ne passant pas par l'origine, et tel que pour tout $t \in I$, la famille $(f(t), f'(t))$ soit liée. Pour tout $t \in I$, on pose $g(t) = \frac{f(t)}{\|f(t)\|}$. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et que pour tout $t \in I$, $g'(t)$ est à la fois orthogonal et colinéaire à $g(t)$.

En déduire que la trajectoire est rectiligne.

On note (\vec{e}_1, \vec{e}_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 , et on pose pour tout $t \in I$: $f(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2$.

Remarque. Le graphe d'une fonction numérique d'équation $y = \phi(x)$ est un cas particulier correspondant à la représentation paramétrique $f(t) = t\vec{e}_1 + \phi(t)\vec{e}_2$.

3.3 Tangente en un point régulier

On appelle *point régulier* un point $M(t_0)$ de la courbe pour lequel la vitesse $f'(t_0)$ ne s'annule pas.

La définition de la dérivée nous indique alors qu'au voisinage de t_0 ,

$$f(t) \underset{t_0}{=} f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + o(t - t_0).$$

Autrement dit, en première approximation l'arc paramétré peut être localement confondu avec l'arc de paramétrisation $t \mapsto f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0)$, qui n'est autre que la droite passant par le point $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur $f'(t_0)$; cette droite est appelée la *tangente* à la courbe au point $M(t_0)$.

Remarque. Dans le cas d'une courbe d'équation $y = \phi(x)$, nous avons $f'(t) = \vec{e}_1 + \phi'(t)\vec{e}_2 \neq \vec{0}$, donc tous les points sont réguliers, et la tangente en $M(t)$ a pour pente $\phi'(t)$.

Exemple. La détermination des tangentes aux points remarquables d'une courbe est indispensable au tracé de celle-ci. Illustrons ceci par l'exemple suivant : $\begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

– les fonctions x et y sont 2π -périodiques, donc la trajectoire est périodique ; on peut se contenter d'étudier celle-ci sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

– x est paire et y impaire, donc la trajectoire présente une symétrie par rapport à l'axe Ox ; on peut donc restreindre le domaine d'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.

– Enfin, on a $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$, donc la trajectoire présente aussi une symétrie par rapport à l'axe Oy ; on peut donc encore restreindre le domaine d'étude à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Sachant que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\begin{cases} x'(t) = -2 \sin(t) \\ y'(t) = 3 \cos(3t) \end{cases}$, les variations de x et y sont données par le tableau suivant :

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	-	-
$x(t)$	2	$\sqrt{3}$	0
$y(t)$	0	1	-1
$y'(t)$		+	0

Placer les points remarquables ainsi que les tangentes en ces points est en général suffisant pour obtenir une approximation de la trajectoire, en suivant les variations indiquées par le tableau des variations de x et y .

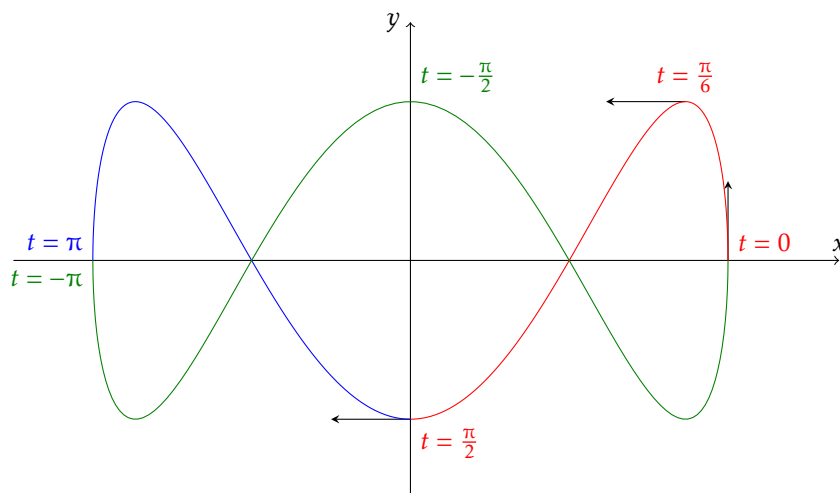


FIGURE 3 – Le domaine étudié est tracé en rouge ; les symétries obtenues prolongent le tracé sur $[0, \pi]$ (en bleu) puis sur $[-\pi, \pi]$ (en vert).

Pour un tracé plus précis on utilise la bibliothèque `matplotlib.pyplot` et le script suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace(0, 2*np.pi, 256)
X = [2*np.cos(t) for t in T]
Y = [np.sin(3*t) for t in T]

plt.plot(X, Y)
plt.grid()
plt.axis('equal') # pour obtenir un repère orthonormé
```

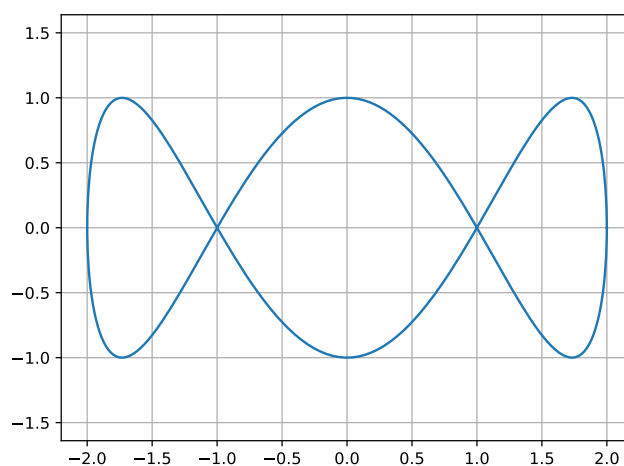


FIGURE 4 – Le tracé obtenu à l'aide de `matplotlib.pyplot`.