Chapitre V
Suites et séries de fonctions

C'est au XIX[e] siècle que les mathématiciens comprennent peu à peu l'importance qu'il y a à distinguer différents types de convergence pour une suite de fonctions. Weierstrass, en 1840, est le premier à utiliser le terme de *convergence uniforme* et à comprendre qu'il s'agit d'une des idées fondamentales de l'analyse.

Dans ce chapitre, nous allons considérer une suite de fonctions $f_n : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ et donner un sens à la notion de convergence simple puis de convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n). Ces notions seront ensuite étendues aux séries de fonctions.

1. Convergence d'une suite de fonctions

Dans toute cette partie, on considère un intervalle I de $\mathbb{R}$, et une suite de fonctions (f_n) définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Convergence simple

La première façon d'étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) consiste, *pour chaque valeur* $x \in \mathrm{I}$, à étudier la convergence de la suite numérique $(f_n(x))$. Ceci conduit à la définition :

Définition. — *On dit que la suite de fonctions* (f_n) converge simplement *vers* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ *lorsque pour tout* $x \in \mathrm{I}$, *la suite numérique* $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$.

Exemple. Considérons l'intervalle $[0,\pi]$ et la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n : x \mapsto (\sin x)^n$.

- Si $x \neq \pi/2$ on a $\sin x \in [0,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin x)^n = 0$;
- Si $x = \pi/2$ on a $\sin x = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin x)^n = 1$.

On en déduit que la suite (f_n) converge simplement sur l'intervalle $[0,\pi]$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \pi/2 \\ 1 & \text{si } x = \pi/2 \end{cases}$.

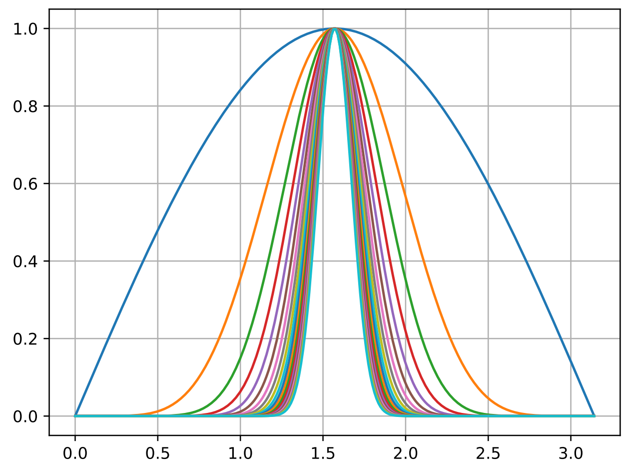

Figure 1 – Le graphe des premières fonctions f_n.

On peut déjà faire une première observation : bien que toutes les fonctions f_n soient continues sur $[0, \pi]$, leur limite simple f présente une discontinuité en $\pi/2$. C'est là un des défauts de la convergence simple sur lequel on reviendra : les propriétés locales (continuité, limite, ...) ne sont pas préservées par ce mode de convergence.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{-n} & \text{si } x < n \\ 0 & \text{si } x \geqslant n \end{cases}$.
Déterminer sa limite simple f.

Nous l'avons vu sur le premier exemple : la convergence simple ne préserve pas la continuité. Elle ne préserve pas non plus le passage à la limite : en général, sous la seule hypothèse de convergence simple, $\lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$, comme le montre l'exercice ci-dessus (avec $a = +\infty$).

En l'absence d'hypothèses supplémentaires, les seules propriétés préservées par la convergence simple sont celles qui ne font pas intervenir le comportement local des fonctions, comme par exemple :

Proposition 1.1 — *Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes qui converge simplement sur l'intervalle* I *vers une fonction f. Alors f est aussi croissante sur* I.

Proposition 1.2 — *Soit (f_n) une suite de fonctions positives qui converge simplement sur l'intervalle* I *vers une fonction f. Alors f est aussi positive sur* I.

Pour obtenir des propriétés plus fortes, il faut adopter une définition de la convergence plus exigeante.

1.2 Convergence uniforme

Définition. — *Soient* I *et* J *deux intervalles tels que* $J \subset I$, *et* $f : I \to \mathbb{K}$ *une fonction. Lorsque f est* bornée *sur* J *on appelle* norme uniforme *de f sur* J *la quantité*

$$\boxed{\|f\|_{\infty,J} = \sup\left\{|f(x)| \;\middle|\; x \in J\right\}}$$

Dans le cas particulier où $J = I$ (intervalle de définition de f) on se contentera de noter $\|f\|_\infty$ au lieu de $\|f\|_{\infty,I}$.

Définition. — *On dit que la suite de fonctions (f_n)* converge uniformément *sur* J *vers une fonction $f : J \to \mathbb{K}$ lorsque les fonctions $f_n - f$ sont bornées (à partir d'un certain rang) sur* J *et*

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_{\infty,J} = 0}$$

La quantité $\|f_n - f\|_{\infty,J}$ doit être interprétée comme la *distance* (uniforme) entre f_n et f sur l'intervalle J.

Proposition 1.3 — *Si (f_n) converge uniformément vers f, elle converge aussi simplement vers f.*

Ce résultat est important car il nous indique la démarche à suivre pour étudier la convergence d'une suite de fonctions (f_n) :

(i) on détermine limite simple f ;

(ii) sur un intervalle J sur laquelle la fonction f est définie, on calcule (ou éventuellement on encadre) $\|f_n - f\|_{\infty,J}$ pour étudier la convergence uniforme.

Remarque. Si $J_1 \subset J_2$ on a $\|f_n - f\|_{\infty,J_1} \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,J_2}$ donc la convergence uniforme sur J_2 entraîne la convergence uniforme sur J_1. En particulier, s'il y a convergence uniforme sur I, il y a *a fortiori* convergence uniforme sur tout intervalle inclus dans I.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$, définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

a. Déterminer sa limite simple f sur $[0,+\infty[$.

b. Former le tableau des variations de $f_n - f$ sur $[0,+\infty[$, et en déduire la valeur de $\|f_n - f\|_\infty$ sur cet intervalle. La convergence est-elle uniforme sur $[0,+\infty[$?

c. Considérons maintenant un réel $\alpha > 0$ fixé. Former le tableau des variations de $f_n - f$ sur $[\alpha,+\infty[$ en distinguant les cas $n \leqslant \dfrac{1}{\alpha^2}$ et $n \geqslant \dfrac{1}{\alpha^2}$, et en déduire la valeur de $\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha,+\infty[}$. La convergence est-elle uniforme sur $[\alpha,+\infty[$?

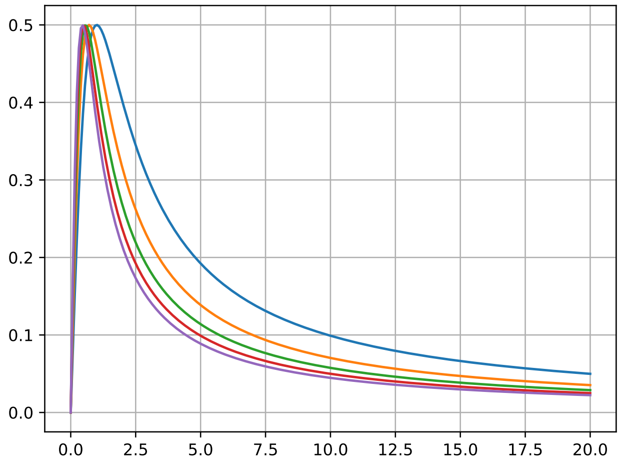

FIGURE 2 – Le graphe des premières fonctions f_n de l'exercice 2.

1.3 Régularité de la limite uniforme

Nous allons maintenant passer en revue les principales propriétés de la convergence uniforme, c'est à dire les propriétés des fonctions f_n qui sont transmises à leur limite uniforme f.

Rappel. Une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est *continue* en $a \in \mathrm{I}$ lorsque pour tout $\epsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon.$$

THÉORÈME 1.4 — *Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f sur un intervalle* I, *et $a \in \mathrm{I}$ un point en lequel toutes les fonctions f_n sont continues. Alors f est aussi continue en a.*

COROLLAIRE — *Une limite uniforme de fonctions continues sur* I *est aussi continue sur* I.

Remarque. La continuité étant une notion locale, il n'est pas forcément nécessaire de prouver la convergence uniforme sur I tout entier pour pouvoir justifier de la continuité de la fonction f.
Supposons par exemple $\mathrm{I} = [0,+\infty[$. S'il n'y a pas convergence uniforme sur I mais seulement sur tout intervalle $[0,\alpha]$, la limite f sera néanmoins continue sur $[0,+\infty[$. En effet, si on considère un réel $a \geqslant 0$, il suffit de choisir un réel $\alpha > a$ et d'appliquer le théorème 1.4 sur l'intervalle $[0,\alpha]$: puisqu'il y a convergence uniforme sur $[0,\alpha]$, la fonction f est continue en a. Et puisque a est un réel quelconque de $[0,+\infty[$, f est bien continue sur cet intervalle.

Le même cas se produit lorsque $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ et lorsqu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha > 0$: tout réel $a > 0$ peut être englobé dans un intervalle de cette forme, et le théorème 1.4 appliqué sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ permet alors de justifier la continuité de f en a.

Ce type de démarche sera appelée une *preuve par recouvrement* de la continuité de f sur I.

Exercice 3

Soit (f_n) une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur l'intervalle I, et (x_n) une suite d'éléments de I qui converge vers $\ell \in \mathrm{I}$. Montrer que la suite $\big(f_n(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

Remarque. Ce théorème est un théorème d'interversion de limites : il montre qu'en cas de convergence uniforme et lorsque les fonctions f_n sont continues en a on a $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$. Nous admettrons la propriété plus générale suivante :

Théorème 1.5 (théorème de la double limite) — *Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f sur I, et a un point adhérent à I (qui peut éventuellement être égal à $\pm\infty$). On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n possède une limite ℓ_n en a. Alors la suite (ℓ_n) admet elle-même une limite ℓ, et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.*

Autrement dit, ce théorème étend la relation $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ dans le cas où a est adhérent à I, en garantissant l'existence des limites.

■ Intégration d'une suite de fonctions

Théorème 1.6 — *Soit (f_n) une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction f sur un segment $[a, b]$. Alors la suite numérique $\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge vers $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Autrement dit :*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Exercice 4

Étudier la convergence simple sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de la suite (f_n) définie par $f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$, puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. La convergence est-elle uniforme sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$?

■ Dérivation d'une suite de fonctions

Observons figure 3 deux fonctions « proches » pour la norme uniforme. On constate que ces deux fonctions délimitent également des aires algébriques proches, ce que traduit le théorème 1.6. En revanche, ces deux mêmes fonctions peuvent avoir des dérivées très éloignées pour la norme uniforme. Il ne faut donc pas s'étonner que le théorème de dérivation d'une suite de fonctions ait une hypothèse de convergence uniforme portant non pas sur la suite (f_n) mais sur la suite des dérivées (f_n').

Théorème 1.7 — *Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, telle que :*

(i) (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I ;

(ii) (f_n') converge uniformément vers une fonction g sur I.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $f' = g$.

Remarque. À l'instar de la continuité, la dérivabilité est un propriété *locale*, ce qui permet d'effectuer une preuve par recouvrement de la dérivabilité de la fonction f : pour prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, il suffit de prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ensemble d'intervalles recouvrant I.

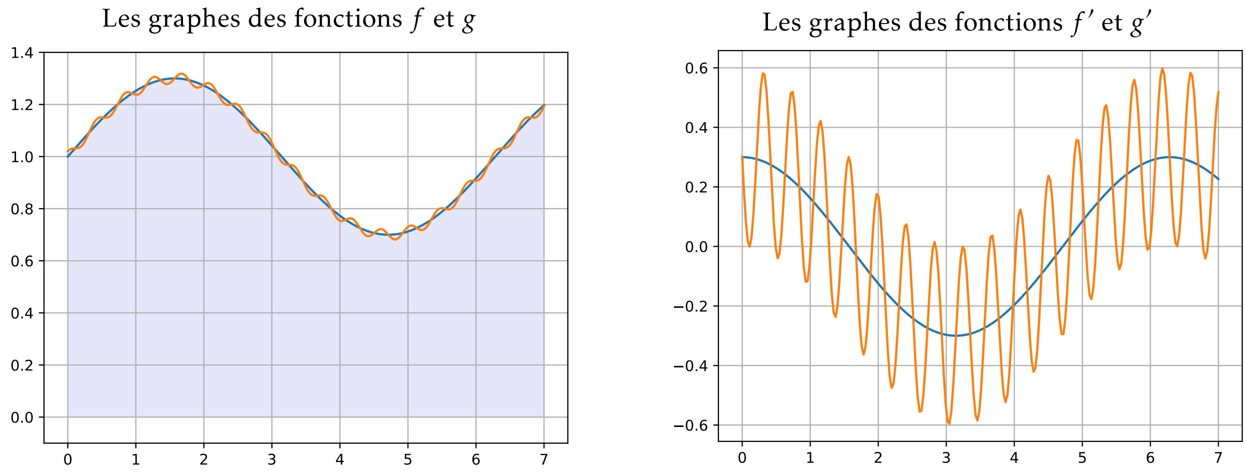

FIGURE 3 – Deux fonctions proches pour la norme uniforme, et leurs dérivées.

Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$
On peut ajouter une conclusion supplémentaire au théorème 1.7 : non seulement f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, mais en plus, *la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur tout segment.*

Considérons alors une suite de fonctions (f_n) de classes $\mathscr{C}^2$ sur I vérifiant :

(i) (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I ;

(ii) (f_n') converge simplement vers une fonction g sur I ;

(iii) (f_n'') converge uniformément vers une fonction h sur I.

Compte tenu du théorème 1.7 et de son complément, les propriétés *(ii)* et *(iii)* prouvent :

(iv) la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, $g' = h$ et la convergence de (f_n') vers g est uniforme sur tout segment inclus dans I.

Mais alors, le théorème 1.7 associé aux propriétés *(i)* et *(iv)* prouve que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, que $f' = g$ et donc que $f'' = h$.

En généralisant on obtient :

PROPOSITION 1.8 — *Soit (f_n) une suite de fonctions de classes $\mathscr{C}^k$ telle que :*

(i) (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I *;*

(ii) pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, $(f_n^{(i)})$ converge simplement vers une fonction g_i sur I *;*

(iii) $(f_n^{(k)})$ converge uniformément vers une fonction g_k sur I.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^k$, et pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $f^{(i)} = g_i$.

2. Convergence d'une série de fonctions

Nous allons maintenant adapter les définitions et résultats précédents au cas des séries de fonctions.

2.1 Convergence simple et absolue

Dans cette partie, on considère un intervalle I et une suite de fonctions (f_n) définies sur I.

DÉFINITION. — *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge* simplement *lorsque pour tout $x \in$ I, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge, et qu'elle converge* absolument *lorsque pour tout $x \in$ I, la série numérique $\sum |f_n(x)|$ converge.*

Nous avons déjà vu dans le chapitre consacré aux séries numériques que la convergence absolue entraine la convergence simple.
Dans le cas où la série $\sum f_n$ converge simplement, on définit une fonction $\mathrm{S} : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ en posant :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

2.2 Convergence uniforme et normale

Définition. — *On dit que la série de fonction $\sum f_n$ converge* uniformément *vers une fonction $\mathrm{S} : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ lorsque la suite des sommes partielles converge uniformément vers S sur I, c'est à dire :*

$$\lim_{n\to+\infty} \Big\| \mathrm{S} - \sum_{k=0}^{n} f_k \Big\|_{\infty,\mathrm{I}} = 0.$$

Nous savons déjà que la convergence uniforme entraîne la convergence simple. Si cette dernière est déjà acquise, nous pouvons définir la fonction *reste au rang n* en posant :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{R}_n(x) = \mathrm{S}(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

ce qui permet de retenir comme définition alternative le résultat suivant :

Proposition 2.1 — *La série de fonction $\sum f_n$ converge* uniformément *sur I lorsque :*

(i) la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I ;

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\mathrm{R}_n\|_{\infty,\mathrm{I}} = 0.$

Nous allons maintenant introduire une notion spécifique aux séries de fonctions et qui va constituer un cas particulier de convergence uniforme, en adoptant la définition suivante :

Définition. — *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge* normalement *(= au sens de la norme) sur I lorsque la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,\mathrm{I}}$ converge.*

Le fait majeur, qui donne tout son intérêt à la notion de convergence normale, est le

Théorème 2.2 — *Toute série normalement convergente est uniformément convergente.*

Remarque. On peut résumer les 4 modes de convergence possible d'une série de fonctions par le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{CV Normale}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{CV Absolue}} \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{\text{CV Uniforme}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{CV Simple}}
\end{tikzcd}$$

Les modes qui nous sont utiles sont :

– la convergence simple pour définir la fonction S ;

– la convergence uniforme pour utiliser les théorèmes de régularité qui assureront la continuité, la dérivabilité, etc., de la fonction S.

De ce fait, l'étude d'une série de fonctions suivra peu ou prou le modèle suivant :

(1) établir la convergence simple de $\sum f_n$ sur I ;

(2) si la convergence est absolue, calculer $\|f_n\|_\infty$ pour prouver la convergence normale sur I ou sur tout segment inclus dans I ;

(3) si la convergence n'est pas absolue, majorer $\|\mathrm{R}_n\|_\infty$ en vue de prouver la convergence uniforme sur I ou sur tout segment inclus dans I.

On notera que le point (3) intervient essentiellement dans le cadre du critère spécial relatif aux séries alternées, critère qui donne une majoration du reste (revoir le cours sur les séries numériques).

Exemple. La fonction *zêta* de Riemann est définie par : $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Pour tout $n \geqslant 1$ et $x > 0$, posons $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.

La technique de comparaison à une intégrale permet de prouver la convergence simple de la série $\sum f_n$ sur $]1,+\infty[$; ainsi la fonction ζ est définie sur $]1,+\infty[$.

Le tableau des variations de la fonction f_n sur $]1,+\infty[$ est le suivant :

x	1	α	$+\infty$
$f_n(x)$	$\frac{1}{n}$	$\searrow$	0

Sur l'intervalle $]1,+\infty[$, nous avons $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$, mais comme la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, la convergence n'y est pas normale. En revanche, sur l'intervalle $[\alpha,+\infty[$ (avec un réel arbitraire $\alpha > 1$) nous avons $\|f_n\|_{\infty,[\alpha,+\infty[} = \dfrac{1}{n^\alpha}$, et puisque la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge, la convergence y est normale, donc uniforme. *A fortiori*, la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $]1,+\infty[$.

Exemple. La fonction *êta* de Dirichlet est définie par : $\eta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

Le critère spécial relatif aux séries alternées prouve la convergence simple de la série $\sum (-1)^{n-1} f_n$ sur $]0,+\infty[$; ainsi la fonction η est définie sur $]0,+\infty[$.

De plus, toujours d'après le critère spécial, $|\mathrm{R}_n(x)| = \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} f_k(x)\right| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \dfrac{1}{n^x}$.

Sur l'intervalle $]0,+\infty[$ on en déduit que $\|\mathrm{R}_n\|_\infty \leqslant 1$, ce qui est insuffisant pour prouver la convergence uniforme. En revanche, pour tout $\beta > 0$ nous avons sur l'intervalle $[\beta,+\infty[$: $\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[\beta++\infty[} \leqslant \dfrac{1}{n^\beta}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$, ce qui prouve la convergence uniforme sur $[\beta,+\infty[$. *A fortiori*, la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit les fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+n^2x}$ et $g_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$. Montrer que les séries $\sum f_n$ et $\sum g_n$ convergent simplement sur $]0,+\infty[$. Sur quels intervalles peut-on établir la convergence uniforme ?

2.3 Régularité de la somme d'une série de fonctions

Nous allons maintenant traduire les théorèmes relatifs aux suites de fonctions dans les cas particulier des séries, en les appliquant à la suite des sommes partielles :

Théorème 2.3 — *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en un point a de I, alors la somme S est continue en a. En particulier, si toutes les fonctions f_n sont continues sur I, il en est de même de leur somme.*

Remarque. À l'instar des suites de fonctions, il est fréquent d'avoir à procéder par recouvrement pour prouver la continuité d'une fonction définie par une série.

Exemple. Compte tenu des deux exemples traités dans la section précédente, on peut affirmer que la fonction *zêta* de Riemann est continue sur tout intervalle $[\alpha,+\infty[$ avec $\alpha > 1$ donc par recouvrement sur $]1,+\infty[$. De même, la fonction *êta* de Dirichlet est continue sur tout intervalle $[\alpha,+\infty[$ avec $\alpha > 0$ donc par recouvrement sur $]0,+\infty[$.

Théorème 2.4 (théorème de la double limite) — *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge uniformément sur l'intervalle* I, *et a un point adhérent à* I *(qui peut éventuellement prendre la valeur $\pm\infty$). On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n possède une limite ℓ_n en a. Alors la série numérique $\sum \ell_n$ converge, et $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.*

Autrement dit, sous réserve de convergence uniforme sur I, $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$.

Exemple. La convergence uniforme sur l'intervalle $[2,+\infty[$ permet grâce à ce théorème de calculer la limite en $+\infty$ de la fonction *zêta* : $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$.

Il permet aussi de prouver que la convergence de cette même série ne peut être uniforme sur un intervalle de la forme $]1,\alpha]$ avec $\alpha > 1$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$. S'il y avait convergence uniforme, la série $\sum \frac{1}{n}$ convergerait, ce qui n'est pas.

Intégration de la somme d'une série de fonctions

Le théorème d'intégration d'une suite de fonctions appliqué à la suite des sommes partielles d'une série de fonctions fournit le résultat suivant :

Théorème 2.5 — *Soit (f_n) une suite d'applications continues sur $[a,b]$, telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur ce segment. Alors la série $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et :*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)\mathrm{d}t.}$$

Exercice 6

a. Montrer que la fonction $\mathrm{S} : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,\mathrm{e}^{-nx}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

b. Calculer $\int_1^x \mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$ et en déduire une expression de $\mathrm{S}(x)$ sans symbole de sommation.

Dérivation de la somme d'une série de fonctions

Théorème 2.6 — *Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle* I, *à valeurs réelles ou complexes. On suppose que la série $\sum f_n$ converge simplement sur* I, *et que la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur* I. *Alors la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur* I, *et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.*

Remarque. Comme pour la continuité, il est fréquent de devoir procéder par recouvrement.

Exemple. Pour montrer que la fonction ζ de Riemann est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son intervalle de définition $]1,+\infty[$, nous devons considérer la série des dérivées $\sum f_n'(x) = \sum -\frac{\ln n}{n^x}$.

Sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$ nous avons $\|f_n'\|_{\infty,[\alpha,+\infty[} = \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$. Si β désigne un réel vérifiant : $1 < \beta < \alpha$, nous avons $\|f_n'\|_{\infty,[\alpha,+\infty[} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$, donc la série $\sum \|f_n'\|_{\infty,[\alpha,+\infty[}$ converge.
La convergence de la série des dérivées $\sum f_n'$ est normale, donc uniforme, sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$; on peut donc affirmer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet tout intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$, puis par recouvrement sur $]1, +\infty[$, et que :

$$\forall x > 1, \quad \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}.$$

Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$
Enfin, à l'instar des suites de fonctions, on établit par récurrence un résultat permettant de prouver directement que la somme d'une série de fonctions est de classe $\mathscr{C}^k$, $k \geqslant 2$:

Proposition 2.7 — *soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, telles que :*

(i) $\sum f_n$ *converge simplement sur* I *;*

(ii) *pour tout* $i \in [\![1, k-1]\!]$, $\sum f_n^{(i)}$ *converge simplement sur* I *;*

(iii) $\sum f_n^{(k)}$ *converge uniformément sur* I.

Alors la fonction $\mathrm{S} : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *est de classe* $\mathscr{C}^k$ *sur* I, *et pour tout* $i \in [\![1, k]\!]$, $\mathrm{S}^{(i)}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}(x)$.

Exercice 7

On considère la fonction $\mathrm{S} : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}$. Montrer que S est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, puis établir une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par S sur l'intervalle $]0, +\infty[$.