Chapitre III
Suites et séries numériques

Outil de base en analyse, la notion de *suite numérique* apparaît très tôt dans l'histoire des sciences, accompagnée de l'idée intuitive de la convergence. Cependant, il faut attendre le XIX^e siècle et les travaux de Cauchy et de Weierstrass pour substituer aux concepts intuitifs qui avaient prévalu jusque là les définitions que nous connaissons.

1. Suites réelles ou complexes

1.1 Convergence des suites numériques

On qualifiera de *suite numérique* toute suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition. — *Une suite numérique (u_n) est dite* bornée *lorsqu'il existe un réel $B \geqslant 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant B$.*

Dans le cas réel, cette définition est équivalente à dire que la suite est majorée et minorée. Cependant on lui préférera en général la définition ci-dessus, qui présente deux avantages :

– cette définition est valable aussi bien dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{C}$ (et, au prix d'une modification mineure, dans le cas des espaces vectoriels) ;

– elle traduit le concept à l'aide d'une inégalité entre nombres *positifs*, ce qui évite de nombreuses erreurs de manipulations d'inégalités.

Définition. — *On dit qu'une suite (u_n) numérique* converge *vers une limite finie ℓ lorsque la distance de u_n à ℓ tend vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$. Ceci revient donc à écrire :*

$$\boxed{\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \ \big|\ n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \epsilon}$$

Autrement dit, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont à une distance de ℓ inférieure à une quantité arbitrairement petite ϵ.

Exercice 1

Démontrer les propriétés suivantes :

a. toute suite convergente est bornée ;

b. toute suite convergente possède une *unique* limite ;

c. toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Théorème 1.1 (Cesàro) — *Soit (u_n) une suite numérique qui converge vers une limite ℓ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que la suite (v_n) converge vers ℓ.*

Exercice 2

Déduire du théorème de Cesàro le *lemme de l'escalier* : si une suite numérique (u_n) vérifie : $\lim(u_{n+1} - u_n = \ell$ alors $\lim \dfrac{u_n}{n} = \ell$.

1.2 Le cas particulier des suites réelles

Contrairement à $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ est muni d'une *relation d'ordre*. Celle-ci confère aux suites réelles des propriétés uniques qui n'ont pas d'équivalent dans $\mathbb{C}$, ainsi que dans les autres ensembles dans lesquels nous étendrons le concept de limite.

Limites infinies
La première particularité des suites réelles est de caractériser deux cas particuliers de divergence : la divergence vers $-\infty$ et vers $+\infty$:

Définition. — *Une suite réelle* (u_n) diverge vers $+\infty$ *lorsque :* $\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \;\big|\; n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow u_n \geqslant \mathrm{A}.}$
Une suite réelle (u_n) diverge vers $-\infty$ *lorsque :* $\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \;\big|\; n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow u_n \leqslant \mathrm{A}.$

Autrement dit, une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque u_n est, à partir d'un certain rang, supérieure à une quantité arbitrairement grande A.

Proposition 1.2 — *Une suite réelle qui diverge vers $+\infty$ est minorée mais pas majorée.*

De même, une suite qui diverge vers $-\infty$ est majorée mais non minorée.

Compatibilité avec la relation d'ordre
Proposition 1.3 (passage à la limite dans une inégalité) — *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles convergeant respectivement vers α et β et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$, alors $\alpha \leqslant \beta$.*

Théorème 1.4 (encadrement) — *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. On suppose que (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ. Alors (v_n) converge vers ℓ.*

Théorème 1.5 (minoration) — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. On suppose que (u_n) diverge vers $+\infty$. Alors (v_n) diverge vers $+\infty$.*

■ Suites monotones

Théorème 1.6 — *Une suite croissante et majorée converge ; une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.*

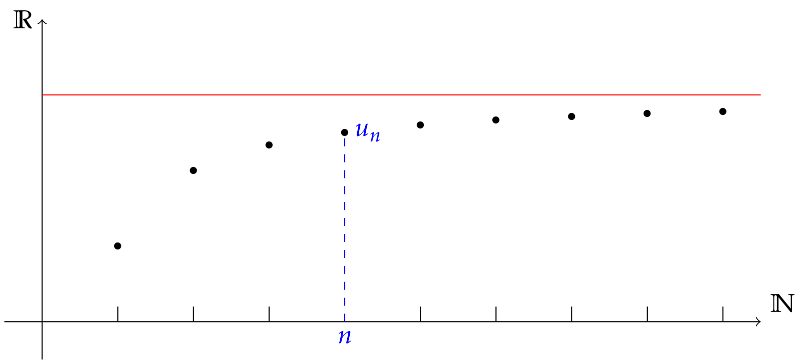

Figure 1 – La limite d'une suite croissante et majorée est la borne supérieure de la suite.

Remarque. Bien entendu, une suite décroissante est convergente lorsque elle est minorée, et diverge vers $-\infty$ dans le cas contraire.

Enfin, à la notion de suite monotone est attaché le concept de *suites adjacentes*, utile car fournissant une approximation par défaut et par excès de leut limite commune.

Définition. — *Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites* adjacentes *lorsque (u_n) est croissante, (v_n) décroissante, et* $\lim\limits_{+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème 1.7 — *Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, et ces deux suites convergent vers la même limite ℓ ; ℓ est l'unique réel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.*

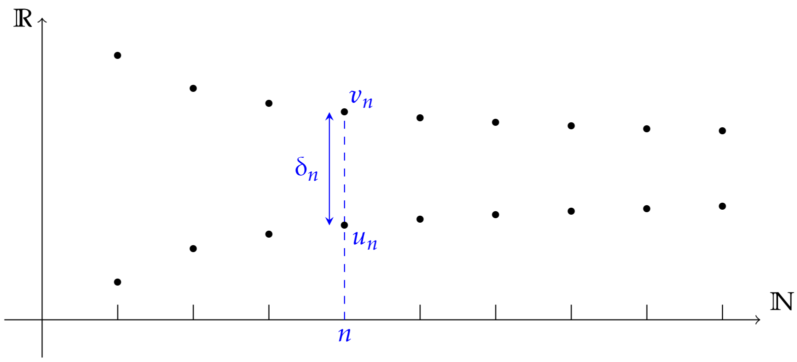

Figure 2 – L'écart entre deux suites adjacentes décroit et tend vers 0 en décroissant.

Exercice 3

On pose $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n.n!}$. Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, puis montrer que leur limite commune est irrationnelle.

Remarque. Nous aurons l'occasion de prouver plus tard dans l'année que la limite commune aux deux suites de cet exercice est le nombre de Neper e (la base du logarithme naturel). Les deux suites (a_n) et (b_n) permettent donc d'obtenir une approximation par défaut et par excès de cette quantité, en utilisant le script Python suivant.

```
from math import factorial

n = 1
a = 2
while 1 / (n * factorial(n)) > 1e-12:
    n += 1
    a += 1 / factorial(n)
b = a + 1 / (n * factorial(n))
```

```
In [1]: a, b
Out[1]: (2.71828182845823, 2.7182818284590495)
```

Si on fait abstraction des erreurs de calcul inhérentes à la manipulation des flottants en machine, nous pouvons affirmer que $2{,}718\,281\,828\,458\,23 < \mathrm{e} < 2{,}718\,281\,828\,459\,049\,5$, ce qui fournit les première décimales de $\mathrm{e} \approx 2{,}718\,281\,828\,45\cdots$.

1.3 Comparaison asymptotique

Peut-on dire qu'une suite converge lentement ou rapidement ? Dans l'absolu, cette question n'a pas de sens, puisque la notion de vitesse est une notion *relative*. Il importe donc d'avoir des éléments de comparaison, composés à la fois de *suites de référence* et d'*outils de comparaison*.

Les notations de Landau

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 0$.
On dit que u_n est *dominée* par v_n lorsque la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note dans ce cas $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.
On dit que u_n est *négligeable* devant v_n lorsque $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$. On note dans ce cas $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.
On dit que (u_n) et (v_n) sont *équivalentes* lorsque $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. On note dans ce cas $u_n \sim v_n$.

On peut noter que $\boxed{\text{les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont équivalentes si et seulement si } u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n).}$

Suites de références
Ces notations n'ont d'intérêt que pour comparer des infiniment petits (des suites qui tendent vers 0) ou des infiniment grands (des suites qui tendent vers $+\infty$) entre eux. Si deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune ℓ, on comparera les suites $(u_n - \ell)$ à $(v_n - \ell)$ entre elles pour mesurer leurs vitesses de convergence relatives.

En outre, *dans la pratique* la suite (v_n) est le plus souvent une suite de référence, c'est-à-dire une suite dont on connait le comportement. En ce qui nous concerne, les suites de références au voisinage de $+\infty$ seront composées des fonctions $(\ln n)^\alpha$ (avec $\alpha > 0$), n^β (avec $\beta > 0$) et $\mathrm{e}^{\gamma n}$ (avec $\gamma > 0$). À ce sujet, rappelons le principe dit des *croissances comparées* :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma > 0, \qquad \boxed{(\ln n)^\alpha = \mathrm{o}(n^\beta) \qquad \text{et} \qquad n^\beta = \mathrm{o}(\mathrm{e}^{\gamma n})}$$

Les suites de référence au voisinage de 0 sont les inverses des trois suites précédentes. Ainsi,

$$\mathrm{e}^{-\gamma n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n^\beta} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{(\ln n)^\alpha}\right).$$

Exercice 4

Ordonner les suites ci-dessous à l'aide de la relation « *est négligeable devant* » :

$$n^2\,\mathrm{e}^n \qquad n\ln^2 n + n^2 \qquad \frac{n^3}{\ln n} \qquad \frac{\mathrm{e}^n}{n\ln n} \qquad n + \ln\sqrt{n} \qquad \frac{n^2}{n+\ln n} \qquad n^2\ln^2 n$$

Comparaison logarithmique

La notion que nous allons introduire consiste à comparer deux suites positives (concrètement une suite à étudier et une suite de référence) par le biais du quotient de deux termes consécutifs de ces suites. Cette technique repose sur le résultat suivant :

Lemme — *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites de réels strictement positifs telles qu'à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.*

Dans la pratique, nous nous contenterons de prendre pour l'une de ces deux suites une suite géométrique :

Proposition 1.8 (comparaison à une suite géométrique) — *Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose l'existence d'un réel positif a tel qu'à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant a$. Alors $u_n = \mathrm{O}(a^n)$.*
De même, s'il existe un rang à partir duquel $a \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ alors $a^n = \mathrm{O}(u_n)$.

Exercice 5

Montrer que si $a < \mathrm{e} < b$ alors $n^n b^{-n} = \mathrm{O}(n!)$ et $n! = \mathrm{O}(n^n a^{-n})$.

2. Séries numériques

2.1 Généralités

À une suite réelle ou complexe (u_n) on associe la suite (S_n) dont le terme général est défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La suite (S_n) est la suite des *sommes partielles* associée à la *série* $\sum u_n$ de terme général u_n.

Définition. — *On dit que la série* $\sum u_n$ converge *lorsque la suite* (S_n) *converge, et qu'elle* diverge *dans le cas contraire. En cas de convergence, on pose :* $S = \lim_{+\infty} S_n$, *et on écrira :* $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Enfin, lorsque qu'une série converge, on appelle *reste d'ordre n* la quantité : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. On définit ainsi une suite (R_n) qui converge vers 0.

Exemple. Séries géométriques.

Soit $a \in \mathbb{C}$, et $u_n = a^n$. Si $a \neq 1$ on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$; si $a = 1$ on a $s_n = n + 1$.

- Lorsque $|a| < 1$, $\lim_{+\infty} a^{n+1} = 0$ donc la série $\sum a^k$ converge, et $\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \dfrac{1}{1-a}$;
- Lorsque $|a| \geqslant 1$, la série $\sum a^k$ diverge en vertu de la proposition 2.1.

Attention. Les résultats concernant les opérations sur les limites permettent de prouver que la somme de deux séries convergentes est encore convergente, ou que le produit par un scalaire d'une série convergente est encore convergente. Attention néanmoins à ne pas commettre l'erreur suivante : la série $\sum (u_n + v_n)$ peut être convergente sans que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ le soient. Autrement dit, avant d'écrire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

il faudra prendre la peine de vérifier que ces séries sont effectivement convergentes.

■ Correspondance fondamentale entre suites et séries

Nous avons associé à une suite (u_n) la suite (S_n) des sommes partielles de la série $\sum u_n$ de terme général u_n. Réciproquement, si (S_n) est une suite *quelconque* on peut, en posant : $u_0 = S_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$, la faire apparaitre comme la suite des sommes partielles d'une certaine série. Cette égalité permet de déduire des propriétés de la suite (S_n) certains résultats qui concernent la suite (S_n), à commencer par la

Proposition 2.1 — *Si la série* $\sum u_n$ *converge, la suite* (u_n) *tend vers* 0.

Attention. Ce critère que nous venons d'énoncer n'assure pas à lui seul la convergence de la série ; il existe en effet de nombreuses séries divergentes dont le terme général tend vers 0. Il suffit pour cela que la suite (S_n) diverge et que la suite $(S_n - S_{n-1})$ tende vers 0. C'est le cas par exemple lorsque $S_n = \ln n$.

Mais l'exemple le plus connu est sans conteste la série *harmonique* $\sum \dfrac{1}{n}$. Les méthodes pour prouver la divergence de cette série sont très nombreuses, et nous verrons plus loin (dans la section « comparaison à une intégrale ») une méthode plus simple. Dans l'immédiat, nous allons raisonner par l'absurde en supposant la convergence de cette série. Dans ces conditions, la suite $S_{2n} - S_n$ converge vers 0. Mais

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

ce qui est contradictoire.

Égalité télescopique
Lorsqu'on remplace u_k par $S_k - S_{k-1}$ pour $k \geqslant 1$ dans la relation $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}).$$

Cette relation, lorsqu'elle est mise en évidence, permet le calcul de certaines sommes, comme par exemple dans l'exercice suivant.

Exercice 6
Prouver la convergence et calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

2.2 Séries de nombres réels positifs

Considérons maintenant une suite (u_n) de nombres réels *positifs*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $S_{n+1} - S_n = u_n \geqslant 0$, donc la suite des sommes partielles (S_n) est *croissante*. En conséquence :

$$\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est convergente si et seulement si la suite } (S_n) \text{ des sommes partielles est majorée.}}$$

Nous allons tirer plusieurs conséquences de cette constatation :

Théorème 2.2 (comparaison) — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors la convergence de la série $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$, et la divergence de $\sum u_n$ celle de $\sum v_n$.*

Remarque. On peut remplacer l'hypothèse : $u_n \leqslant v_n$ par l'hypothèse : $u_n = O(v_n)$. En effet, cette nouvelle hypothèse implique l'existence d'un réel $B > 0$ tel que $u_n \leqslant Bv_n$, et il suffit alors d'appliquer le théorème aux séries $\sum u_n$ et $\sum Bv_n$. On peut donc énoncer le :

Corollaire — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels* positifs *telles que : $u_n = O(v_n)$. Alors la convergence de la série $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$, et la divergence de $\sum u_n$ celle de $\sum v_n$.*

Exemples. La série $\sum \frac{n}{3^n}$ converge car $\frac{n}{3^n} = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ converge.
La série $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge car $\frac{1}{n} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Corollaire — *Deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à terme général positif vérifiant : $u_n \sim v_n$ ont même nature*[1].

Attention. Ce résultat peut être mis en défaut lorsque les suites ne sont pas de signes constants. Cette erreur, très commune, à même été commise par Cauchy dans un article de 1823 consacré aux séries trigonométriques !

1. la *nature* d'une série est le fait pour elle d'être convergente ou divergente

Séries de référence
Ces deux derniers résultats nécessitent de posséder des séries de référence, c'est à dire des séries dont on connait la nature et à qui on compare les autres séries. En ce qui nous concerne, nos séries de référence seront les séries géométriques (étudiées à la section 2.1) et les séries de Riemann (étudiées à la section 2.3).

Exercice 7

En admettant le résultat du corollaire du théorème 2.4, étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = 3\ln(n^2+1) - 2\ln(n^3+1), \qquad v_n = \frac{a^n}{1+a^{2n}} \quad (a>0), \qquad w_n = \sqrt[n]{n} - 1, \qquad x_n = \frac{\ln n}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Enfin, la comparaison logarithmique à une série géométrique fournit le :

Théorème 2.3 (règle de d'Alembert) — *Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$. Alors : si $a<1$, la série $\sum u_n$ converge ; si $a>1$ elle diverge.*

Attention. On ne peut rien conclure lorsque $a=1$.

Cette règle s'avère particulièrement efficace dans le cas où le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ présente des simplifications notables, comme on pourra l'observer dans l'exercice suivant.

Exercice 8

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}{n^n}$.

2.3 Comparaison à une intégrale

Cette section concerne les séries de la forme $\sum f(n)$, où $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ est une fonction positive, continue par morceaux, et décroissante.

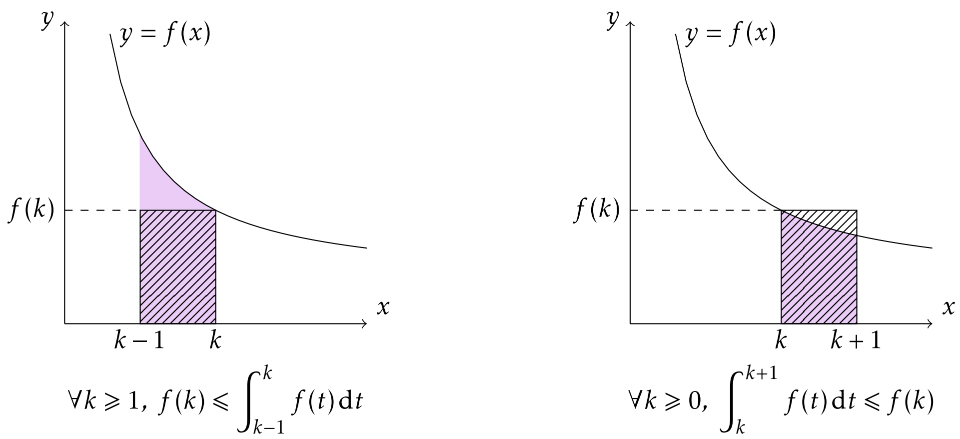

Figure 3 – Minoration et majoration de l'intégrale d'une fonction décroissante.

Observons les deux graphes représentés figure 3. Dans les deux cas, on compare l'aire hachurée, égale à $f(k)$, avec l'aire colorée, qui se calcule par l'intermédiaire d'une intégrale.

Pour tout $t \in [k-1,k]$, $f(k) \leqslant f(t)$ donc $f(k) = \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour tout $t \in [k,k+1]$, $f(t) \leqslant f(k)$ donc $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t = f(k)$.

La première inégalité n'est valable que pour $k \geqslant 1$; en sommant on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et donc} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_{0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t} \quad (1)$$

En revanche, la seconde égalité est valable pour $k \geqslant 0$; en sommant on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \qquad \text{et donc} \qquad \boxed{\int_{0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k)} \quad (2)$$

On en déduit :

Théorème 2.4 — *La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge.*

Remarque. Plus tard dans l'année nous dirons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

Séries de Riemann

L'application de ce théorème aux fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ donne nos principales séries de référence :

Corollaire (Séries de Riemann) — *La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

2.4 Équivalent des sommes partielles et des restes

Lorsque une série numérique converge, la suite des restes tend vers 0 (c'est un infiniment petit) ; il est donc légitime de chercher un équivalent simple du reste.
Lorsque une série à terme général positif diverge, la suite de ses sommes partielles diverge vers $+\infty$ (c'est un infiniment grand) ; il est donc légitime de chercher un équivalent simple de la somme partielle.
La technique de comparaison à une intégrale permet dans certains cas de répondre à ces questions.

Exemple. Nous avons : $\forall k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$, donc en sommant :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \quad \text{ce qui donne :} \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{N}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient : $\displaystyle\frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n}$ et donc : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$. Nous avons obtenu un équivalent du reste de la série convergente $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 9

Appliquer de nouveau la technique de comparaison à une intégrale, mais cette fois-ci pour encadrer une somme partielle d'une série divergente : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

En déduire un équivalent de cette somme lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque. Il est possible d'obtenir une formule plus précise que dans l'exercice précédent, en prouvant l'existence d'une constante $\gamma \approx 0{,}577\cdots$, appelée *constante d'Euler* vérifiant : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1).}$

■ Un complément (hors programme)

Le résultat qui suit donne une méthode alternative pour déterminer un équivalent du reste d'une série convergente, ou de la somme partielle d'une série convergente, toujours dans le cadre d'une série à terme général positif. Ce résultat étant hors-programme, il doit être démontré avant d'être utilisé.

Proposition 2.5 — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites à terme général positif telles que $u_n \sim v_n$. Alors :*

– *si* $\sum u_n$ *converge il en est de même de* $\sum v_n$, *et* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$;

– *si* $\sum u_n$ *diverge il en est de même de* $\sum v_n$, *et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

2.5 Séries alternées

Nous allons maintenant étudier un cas particulier de séries à terme général réel, mais qui ne sont plus de signe constant. Nous adoptons la définition suivante :

Définition. — *Une série* alternée *est une série de la forme* $\sum(-1)^n a_n$, *la suite* (a_n) *étant formée de nombres réels positifs.*

L'intérêt de ces séries est que l'on dispose d'un critère très simple assurant leur convergence ; il s'agit du résultat suivant :

Théorème 2.6 (Critère spécial des séries alternées) — *Si* (a_n) *est une suite décroissante qui tend vers 0, la série alternée* $\sum(-1)^n a_n$ *est une série convergente.*

Exemple. La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ vérifie les conditions du critère spécial des séries alternées, donc converge. Nous pouvons illustrer cette convergence en observant le comportement des sommes partielles grâce au script Python présenté figure 4.
Cette figure indique clairement comment procéder pour prouver ce théorème : montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Nous en déduirons aussi le résultat suivant :

Corollaire — *Si la série* $\sum(-1)^n a_n$ *vérifie les hypothèses du critère special des séries alternées, le reste* $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k$ *vérifie :* $|r_n| \leqslant a_{n+1}$. *De plus,* r_n *est du signe de son premier terme, à savoir du signe de* $(-1)^{n+1}a_{n+1}$.

Remarque. Dans le cas particulier de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ il est possible, en séparant les termes pairs des termes impairs, d'en calculer la somme.
En effet on a : $\displaystyle\mathrm{S}_{2p} = \sum_{n=1}^{2p} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k} = \mathrm{I}_p - \mathrm{J}_p$, avec $\displaystyle\mathrm{I}_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k-1}$ et $\displaystyle\mathrm{J}_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k}$.
Par ailleurs, $\displaystyle\mathrm{I}_p + \mathrm{J}_p = \sum_{n=1}^{2p} \frac{1}{n} = \ln(2p) + \gamma + \mathrm{o}(1)$, et $\displaystyle\mathrm{J}_p = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}\ln p + \frac{\gamma}{2} + \mathrm{o}(1)$ donc :

$$\mathrm{I}_p - \mathrm{J}_p = (\mathrm{I}_p + \mathrm{J}_p) - 2\mathrm{J}_p = \ln(2p) + \gamma - \ln p - \gamma + \mathrm{o}(1) = \ln 2 + \mathrm{o}(1).$$

En passant à la limite, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

```python
import matplotlib.pyplot as plt

s = 0
X = []
Y = []
for n in range(1, 31):
    s += (-1)**(n-1) / n
    X.append(n)
    Y.append(s)

plt.plot(X, Y, '-o')
```

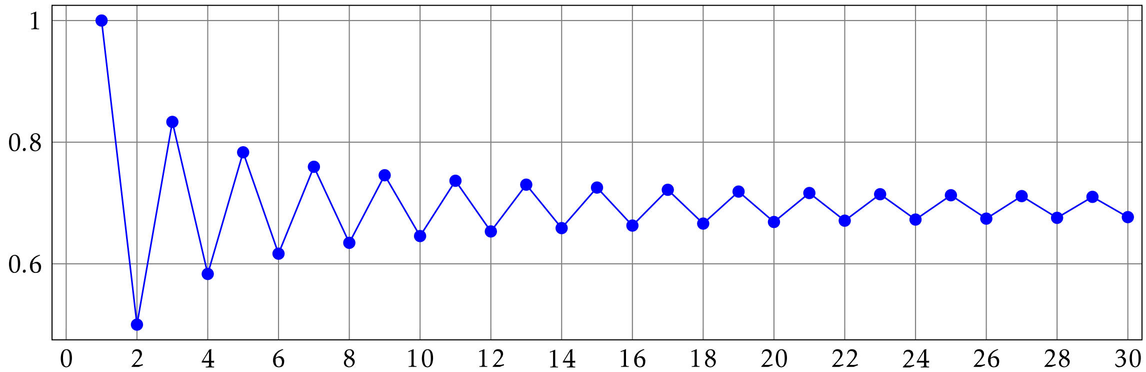

Figure 4 – La suite des sommes partielles de la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 10

Soit $\alpha > 0$. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$. Effectuer un développement asymptotique à deux termes de u_n, puis expliquer comment l'utiliser pour prouver la convergence de la série $\sum u_n$.

2.6 Séries absolument convergentes

Le critère spécial relatif aux séries alternées s'applique dans un cadre relativement étroit : il faut que le terme général soit réel, de signe alterné et décroissante en valeur absolue, même si l'exercice 10 a montré comment il pouvait être utilisé dans un cadre *un peu* plus général.
Pour prouver la convergence d'une série à terme général complexe, ou à terme général réel mais sans alternance de signe, il ne reste alors (dans le cadre de notre programme) qu'une seule possibilité : l'absolue convergence, qui repose sur le théorème suivant :

Théorème 2.7 — *Si la série de terme général positif $\sum |u_n|$ converge, il en est de même de la série $\sum u_n$. On dit alors que la série $\sum u_n$ est* absolument convergente.

Remarque. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, l'inégalité triangulaire se généralise en :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Exemple. La fonction *zêta* de Riemann et la fonction *êta* de Dirichlet sont respectivement définies pour une variable complexe z par : $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ et $\eta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$.

Si $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{1}{n^z} = \dfrac{\mathrm{e}^{-iy\ln n}}{n^x}$ donc $\left|\dfrac{1}{n^z}\right| = \dfrac{1}{n^x}$; ainsi les fonction ζ et η sont (au moins) définies sur l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) > 1\right\}$.

Exercice 11

Démontrer que lorsque $\mathfrak{Re}(z) > 1$, $\eta(z) = \left(1 - 2^{1-z}\right)\zeta(z)$.

Semi-convergence

Lorsque $x \in \mathbb{R}$, le critère spécial des séries alternées permet de prouver que $\eta(x)$ est définie pour $x > 0$. Plus généralement, une technique hors-programme (la transformation d'Abel) permet de prouver que $\eta(z)$ est définie lorsque $\mathfrak{Re}(z) > 0$.

Ainsi, lorsque $0 < x \leqslant 1$, la série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est un exemple de série convergente *qui n'est pas absolument convergente*. On parle alors de série *semi-convergente*.

Comme exemple type de semi-convergence on pourra donc citer $\eta(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, qui est une série convergente d'après le critère spécial, mais qui n'est pas absolument convergente car la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

2.7 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. — *Le* produit de Cauchy *de deux séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *est la série* $\sum w_n$ *de terme général*

$$\boxed{w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j.}$$

Remarque. L'expression de w_n doit être comprise ainsi : on réalise la somme de tous les termes de la forme $u_i v_j$ pour lesquels les entiers i et j vérifient la condition $i + j = n$.

Cette condition est équivalente aux conditions $i \in [\![0, n]\!]$ et $j = n - i$ donc on peut aussi écrire $w_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$.

Si en revanche on observe que $j \in [\![0, n]\!]$ et $i = n - j$ on écrira $w_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} u_{n-j} v_j$.

Attention. Si la suite (u_n) n'est définie que pour $n \geqslant 1$, il faut adapter la définition : la suite w_n ne sera définie que pour $n \geqslant 1$ et la condition $i + j = n$ se traduira par $i \in [\![1, n]\!]$ et $j = n - i$ ou par $j \in [\![0, n-1]\!]$ et $i = n - j$:

$$\forall n \geqslant 1, \quad w_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_{n-i} = \sum_{j=0}^{n-1} u_{n-j} v_j.$$

De même, si (u_n) et (v_n) ne sont définies que pour $n \geqslant 1$ la suite (w_n) ne sera définie que pour $n \geqslant 2$ par

$$\forall n \geqslant 2, \quad w_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_{n-i} = \sum_{j=1}^{n-1} u_{n-j} v_j.$$

Lemme — *Soient* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *deux séries à terme général* positif *(*$a_n \geqslant 0$ *et* $b_n \geqslant 0$*) et convergentes. Alors leur produit de Cauchy* $\sum c_n$ *converge, et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Théorème 2.8 — *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Alors leur produit de Cauchy $\sum w_n$ converge absolument, et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big).$$

Exercice 12

Soit (u_n) une suite numérique telle que la série $\sum u_n$ converge absolument. En faisant apparaître un produit de Cauchy, montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k u_k$ converge absolument, puis exprimer sa somme.

2.8 La formule de Stirling : un équivalent de $n!$

La formule de Stirling fournit un équivalent de $n!$. Cette formule a été démontrée en deux temps : De Moivre prouve l'existence d'une constante C telle que $n! \sim \mathrm{C}\sqrt{n}\Big(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\Big)^n$, puis Stirling trouve la valeur de cette constante, $\mathrm{C} = \sqrt{2\pi}$.

Le résultat de Moivre

Exercice 13

Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $u_n = \dfrac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln\Big(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\Big)$. Prouver la convergence de la série $\sum v_n$ et en déduire l'existence d'une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que $n! \sim \mathrm{C}n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}$.

L'apport de Stirling

Il repose sur les intégrales de Wallis $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t$.

Exercice 14

a. À l'aide d'une intégration par parties, prouver que pour tout $n \geqslant 2$, $n\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$ et en déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$ et $\mathrm{I}_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$.

b. Justifier que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{I}_{n-1} \leqslant \mathrm{I}_{n-2}$, et en déduire que $\lim \dfrac{\mathrm{I}_{n-1}}{\mathrm{I}_n} = 1$.

c. Exprimer $\lim \dfrac{\mathrm{I}_{2p}}{\mathrm{I}_{2p+1}}$ en fonction de la constante C et en déduire que $\mathrm{C} = \sqrt{2\pi}$.

Les résultats combinés de ces deux exercices prouvent la *formule de Stirling* : $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\Big(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\Big)^n.}$ Cette formule est à connaître mais la preuve n'est pas exigible.