

# Chapitre III

## Espaces euclidiens

Élément important de calcul en géométrie euclidienne, le produit scalaire apparaît cependant assez tard dans l'histoire des mathématiques. On en trouve trace chez Hamilton en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions ou encore chez Peano (associé à un calcul d'aire), et n'est initialement défini qu'à l'aide du cosinus d'un angle. Sa qualité de forme bilinéaire symétrique ne sera exploitée en algèbre linéaire que plus tard et, de propriété, deviendra définition.

Un espace muni d'un produit scalaire sera dit *préhilbertien*<sup>1</sup>, le terme *euclidien* étant réservé aux espaces de dimensions finies.

### 1. Espaces préhilbertiens

#### 1.1 Produit scalaire

Dans toute cette section,  $E$  désigne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension quelconque.

**DÉFINITION.** — Un produit scalaire sur  $E$  est une forme bilinéaire  $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- $\forall (x, y) \in E^2, \phi(x, y) = \phi(y, x)$  ( $\phi$  est symétrique);
- $\forall x \in E, \phi(x, x) \geq 0$  et  $\phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$  ( $\phi$  est définie positive).

Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive<sup>2</sup>.

**Remarque.** Une forme bilinéaire symétrique qui vérifie seulement la propriété  $\forall x \in E, \phi(x, x) \geq 0$  sans être nécessairement définie positive est dite *positive*.

On notera par la suite les notations usuelles :  $\phi(x, y) = \langle x | y \rangle$ , et  $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$ , cette dernière expression désignant la *norme euclidienne* associée au produit scalaire<sup>3</sup>.

Un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un *espace préhilbertien réel*.

**PROPOSITION 1.1** — L'application  $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . Il s'agit du produit scalaire canonique de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  : la base canonique est orthonormée pour ce produit scalaire.

**PROPOSITION 1.2** — Soit  $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction continue à valeurs strictement positives, et  $E$  l'ensemble des fonctions continues  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors l'application  $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\omega(t) dt$  un produit scalaire sur  $E$ .

**Exemple.** L'application  $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ , mais aussi sur  $\mathbb{R}[X]$ .

#### Utilisation de la bilinéarité

En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, on obtient les deux développements suivants :

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2 \\ \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

Ces développements conduisent à diverses *identités de polarisation*, autrement dit des relations qui définissent le produit scalaire à partir de la norme :

$$\langle x | y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \quad \langle x | y \rangle = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad \langle x | y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

On remarquera que ces identités impliquent qu'à une norme euclidienne donnée ne peut correspondre qu'un seul produit scalaire.

1. Comme ce terme le laisse entendre, il existe aussi des espaces *hilbertiens*, mais leur étude n'est pas au programme.

2. Ces différents termes proviennent de l'étude générale des formes bilinéaires.

3. Il s'agit en effet d'une norme au sens topologique du terme.

**THÉORÈME 1.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)** —  $\forall (x, y) \in E^2, |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|.$

**COROLLAIRE** — Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (autrement dit,  $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \times \|y\|$ ) si et seulement si la famille  $(x, y)$  est liée.

### Exercice 1

Soit  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Montrer que  $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$ . Dans quel cas y-a-t-il égalité?

**THÉORÈME 1.4 (Inégalité triangulaire)** —  $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

**Remarque.** Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire lorsque  $\langle x | y \rangle = \|x\| \times \|y\|$ , c'est à dire lorsqu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et qu'en plus  $\langle x | y \rangle \geq 0$ , ce qui impose  $x = 0_E$  ou  $y = \lambda x$  avec  $\lambda \geq 0$ .

## 1.2 Orthogonalité

**DÉFINITION.** — Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

- (i) On dit que deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont orthogonaux lorsque  $\langle x | y \rangle = 0$ .
- (ii) On dit qu'un vecteur  $x$  est orthogonal à un sous-espace vectoriel  $H$  lorsque  $\forall y \in H, \langle x | y \rangle = 0$ .
- (iii) Enfin, deux sous-espaces vectoriels  $H_1$  et  $H_2$  sont orthogonaux lorsque  $\forall (x, y) \in H_1 \times H_2, \langle x | y \rangle = 0$ .

**Remarque.** On peut noter que deux sous-espaces vectoriels orthogonaux sont nécessairement en somme directe. En effet, si  $x \in H_1 \cap H_2$  alors  $\langle x | x \rangle = 0$ , ce qui impose  $x = 0_E$ . On dit alors que la somme  $H_1 \oplus H_2$  est une *somme directe orthogonale*, et on pourra éventuellement la noter  $H_1 \overset{\perp}{\oplus} H_2$ .

**THÉORÈME 1.5 (Pythagore)** — Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux sous-espaces vectoriels orthogonaux, et un vecteur  $x = x_1 + x_2 \in H_1 \overset{\perp}{\oplus} H_2$ . Alors  $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ .

Nous pouvons noter que réciproquement, si nous avons  $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ , alors  $x_1$  et  $x_2$  sont nécessairement orthogonaux.

**DÉFINITION.** — Soit  $A$  une partie quelconque de  $E$ . On appelle orthogonal de  $A$  l'ensemble

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x | a \rangle = 0\}$$

des vecteurs orthogonaux à tout élément de  $A$ . Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**PROPOSITION 1.6** — Si  $H$  est un sous-espace vectoriel et  $A$  une partie génératrice de  $H$ , alors  $H^\perp = A^\perp$ .

**Remarque.** L'intérêt majeur de ce dernier résultat est qu'en dimension finie, déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel  $H$  revient à déterminer l'orthogonal d'une base de  $H$ .

Lorsque  $H$  est un sous-espace vectoriel,  $H^\perp$  est donc le plus grand des sous-espaces vectoriels (au sens de l'inclusion) qui soit en somme directe orthogonale avec  $H$  :  $H \overset{\perp}{\oplus} H^\perp$ .

Attention cependant, cela ne signifie pas pour autant que cette somme soit égale à  $E$ . Il faudra en effet supposer en plus que  $E$  est de dimension finie pour pouvoir affirmer que  $H$  et  $H^\perp$  sont des sous-espaces supplémentaires.

Si  $H_1$  et  $H_2$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , on dispose enfin des équivalences :

$$H_1 \text{ et } H_2 \text{ sont orthogonaux} \iff H_1 \subset H_2^\perp \iff H_2 \subset H_1^\perp.$$

## 1.3 Espaces euclidiens

**DÉFINITION.** — Une famille finie  $(e_1, \dots, e_p)$  de vecteurs de  $E$  est dite orthonormée lorsque :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**PROPOSITION 1.7** — Une famille orthonormée est libre. En particulier, lorsque  $E$  est de dimension finie  $n$ , une famille orthonormée constituée de  $n$  vecteurs est une base de  $E$ , dite base orthonormée.

On appelle *espace euclidien* tout espace préhilbertien réel de dimension finie. Le résultat précédent définit la notion de base orthonormée, mais ne prouve pas l'existence de celles-ci. C'est l'objet du théorème suivant :

**THÉORÈME 1.8** — Tout espace euclidien possède des bases orthonormées.

Nous reviendrons sur cette construction une fois définie la notion de *projection orthogonale*; elle prendra alors le nom de *procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*.

### ■ Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Une fois acquise l'existence de bases orthonormées dans un espace euclidien, il reste à constater que les calculs relatifs au produit scalaire sont très simples une fois exprimés dans une telle base.

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée d'un espace euclidien  $E$ , et  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,  $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ . On pose  $X = \text{Mat}_e(x)$

$$\text{et } Y = \text{Mat}_e(y). \text{ Alors : } \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{X^T X}.$$

En outre, on peut noter que  $\langle e_k | x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_k | e_i \rangle = x_k$ , donc on dispose dans un espace euclidien d'une expression simple pour caractériser la décomposition dans une base orthonormée :  $x = \sum_{k=1}^n \langle e_k | x \rangle e_k$ .

**PROPOSITION 1.9** — Toute forme linéaire de  $E$  s'écrit de manière unique :  $x \mapsto \langle a | x \rangle$ , où  $a$  est un vecteur de  $E$ .

## 1.4 Projection orthogonale

Revenons maintenant à la notion d'orthogonal d'un sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$ . Nous avons vu que  $H \oplus H^\perp$  est une somme directe, mais ce n'est que lorsque  $H$  est de dimension finie qu'on sera assuré d'être en présence de deux sous-espaces supplémentaires :

**THÉORÈME 1.10** — Si  $E$  est un espace préhilbertien et  $H$  un sous-espace vectoriel de dimension finie; alors  $E = H \oplus H^\perp$ .

**COROLLAIRE** — Lorsque  $E$  est un espace euclidien et  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , on a  $\dim(H^\perp) = \dim E - \dim H$  et  $H^{\perp\perp} = H$ .

**Remarque.** Dans un espace préhilbertien de dimension quelconque, on peut seulement affirmer que  $H \subset H^{\perp\perp}$ .

**DÉFINITION.** — On appelle *projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel  $H$  de dimension finie d'un espace préhilbertien  $E$*  la *projection vectorielle sur  $H$  parallèlement à  $H^\perp$* .

Lorsque  $p$  est la projection orthogonale sur  $H$  et  $(e_1, \dots, e_k)$  une base orthonormée de  $H$  on a :

$$\forall x \in E, \quad p(x) = \sum_{j=1}^k \langle e_j | x \rangle e_j$$

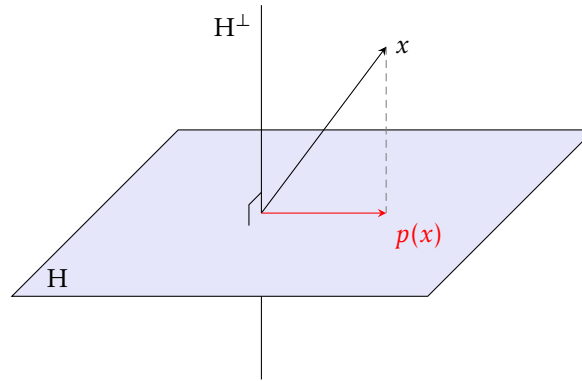


FIGURE 1 – Représentation graphique d'une projection orthogonale.

**Remarque.** Dans le cas de la projection sur un hyperplan  $H$  on a  $\dim H = \dim E - 1$  donc  $\dim H^\perp = 1$ . Si  $a$  est un vecteur unitaire de  $H^\perp$ , la projection orthogonale sur  $H^\perp$  s'écrit  $x \mapsto \langle a | x \rangle a$  et celle sur  $H$  s'écrit donc  $x \mapsto x - \langle a | x \rangle a$ .

Lorsqu'on ne dispose pas d'une base orthonormée de  $H$ , on utilise pour caractériser le vecteur  $p(x)$  le résultat suivant :

**PROPOSITION 1.11** —  $p(x)$  est l'unique vecteur de  $E$  vérifiant les conditions :  $\begin{cases} p(x) \in H \\ x - p(x) \in H^\perp \end{cases}$

### Distance à un sous-espace vectoriel

Si  $x \in E$  et si  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on appelle *distance* de  $x$  à  $H$  la quantité :  $d(x, H) = \inf\{\|x - h\| \mid h \in H\}$ . Dans le cas où  $H$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel, le résultat suivant nous permet de calculer cette distance :

**PROPOSITION 1.12** — L'application  $\begin{pmatrix} H & \rightarrow & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \|x - h\| \end{pmatrix}$  atteint un minimum en un unique point, à savoir  $h = p(x)$ . Autrement dit,  $d(x, H) = \|x - p(x)\|$ .

### Exercice 2

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 4,  $(e)$  une base orthonormée et  $u = 3e_1 + 2e_2 - e_3 + e_4$ ,  $v = 2e_1 + 5e_2 - e_4$ . On note  $H = \text{Vect}(u, v)$ . Calculer la distance de  $H$  au vecteur  $w = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ .

**Remarque.** Nous reviendrons au chapitre IX sur la notion de distance, dans un cadre plus général, celui des espaces vectoriels normés.

### ■ Orthonormalisation par la méthode de Gram-Schmidt

Considérons une famille libre  $(x_1, \dots, x_k)$  de  $E$ , et notons  $p_j$  la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_{j-1})$  (avec la convention  $p_1 = 0$ ). Alors la famille  $(e)$  définie par les formules suivantes :

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad e_j = \frac{x_j - p_j(x_j)}{\|x_j - p_j(x_j)\|}$$

est une famille orthonormée vérifiant :  $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_j)$ . C'est en outre l'unique famille vérifiant en plus les conditions :  $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \langle x_j | e_j \rangle > 0$ .

**Exemple.** Considérons l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire usuel, ainsi que la famille de vecteurs

$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , et appliquons lui la méthode de Gram-Schmidt :

$$- e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \text{ donc } e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$- p(x_2) = \langle e_1 | x_2 \rangle e_1 = \frac{8}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ donc } x_2 - p(x_2) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } e_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$- p(x_3) = \langle e_1 | x_3 \rangle e_1 + \langle e_2 | x_3 \rangle e_2 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } x_3 - p(x_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 3

On muni  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire :  $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ . À l'aide du procédé de Schmidt appliqué à la base canonique de  $\mathbb{R}[X]$ , justifier l'existence d'une unique famille *échelonnée en degré* de polynômes unitaires  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et deux à deux orthogonaux (il s'agit des polynômes de Legendre).  
Calculer  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$ .

## 2. Endomorphismes dans un espace euclidien

### 2.1 Isométries vectorielles

**DÉFINITION.** — Si  $E$  est un espace préhilbertien, on appelle *isométrie vectorielle* un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  compatible avec le produit scalaire, c'est à dire vérifiant :  $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$ .

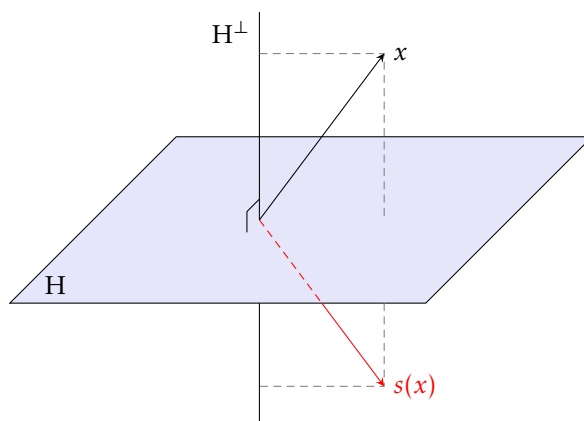
Une telle application est *a fortiori* compatible avec la norme euclidienne : en posant  $y = x$  on obtient  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ , ce qui explique leur nom. Le fait remarquable est que la réciproque est vraie :

**PROPOSITION 2.1** —  $u \in \mathcal{L}(E)$  est une isométrie vectorielle si et seulement si  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ .

En conséquence de quoi une isométrie vectorielle est injective : en effet, lorsque  $u(x) = 0_E$  nous avons  $\|x\| = \|u(x)\| = 0$  et donc  $x = 0_E$ . Et en particulier, lorsque  $E$  est de dimension finie, une isométrie vectorielle est nécessairement inversible. Un endomorphisme inversible étant appelé un *automorphisme*, en dimension finie les isométries vectorielles portent aussi le nom d'*automorphisme orthogonal*.

On notera  $\mathcal{O}(E)$  l'ensemble des isométries vectorielles de  $E$  ; il est appelé le *groupe orthogonal* de  $E$ .

**Exemple.** On appelle *symétrie orthogonale* par rapport à un sous-espace vectoriel  $H$  la symétrie par rapport à  $H$ , parallèlement à  $H^\perp$ . Il s'agit d'une isométrie vectorielle.



Posons  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in H$  et  $x_2 \in H^\perp$ . Alors  $\|s(x)\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2$  donc  $s$  préserve la norme ; il s'agit bien d'une isométrie vectorielle.

**Attention.** Une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal (ie une isométrie vectorielle), mais ce n'est pas le cas d'une projection orthogonale (qui, hormis l'identité, n'est pas inversible).

**Remarque.** Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan (un sous-espace vectoriel de dimension  $p-1$ ) est aussi appelée une *réflexion*. En dimension 2, les réflexions sont donc les symétries orthogonales par rapport aux droites, en dimension 3 les symétries orthogonales par rapport aux plans.

#### Exercice 4

Soient  $a$  et  $b$  deux vecteurs non nuls distincts d'un espace euclidien  $E$  vérifiant  $\|a\| = \|b\|$ . Montrer qu'il existe une unique réflexion  $s$  telle que  $s(a) = b$ .

**PROPOSITION 2.2** — Soit  $E$  un espace euclidien,  $u \in \mathcal{O}(E)$  une isométrie vectorielle, et  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Alors  $H^\perp$  est aussi stable par  $u$ .

### ■ Interprétation matricielle d'une isométrie vectorielle

**PROPOSITION 2.3** — Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base orthonormée de  $E$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $u$  est une isométrie vectorielle si et seulement si  $(u(e_1), \dots, u(e_p))$  est une base orthonormée.

**COROLLAIRE** — Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée,  $u \in \mathcal{L}(E)$ , et  $A = \text{Mat}_e(u)$ . Alors  $u$  est une isométrie vectorielle si et seulement si  $A^T A = I$ .

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  vérifiant l'identité  $A^T A = I$  est appelée une matrice *orthogonale*. On note  $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ ; ensemble qu'on appelle le *groupe orthogonal* d'ordre  $p$ .

**Remarque.** Si on observe que  $\text{Mat}_{(e)}(u) = \text{Mat}_{(e)}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p))$ , on peut affirmer qu'une matrice orthogonale est une matrice dont les colonnes forment une famille orthonormée pour le produit scalaire usuel. C'est souvent par l'intermédiaire de cette propriété que l'on reconnaît une matrice orthogonale. Une autre conséquence de cette observation réside dans la :

**PROPOSITION 2.4** — La matrice de passage entre deux bases orthonormées est une matrice orthogonale.

#### Structure de groupe

Le vocable *groupe* a une signification particulière en mathématiques, et ce n'est pas par hasard s'il est employé ici. Sans rentrer dans les détails, l'emploi de ce terme implique les propriétés suivantes :

- (i) la matrice  $I_p$  est orthogonale :  $I_p \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ ;
- (ii) si  $A$  et  $B$  sont orthogonales,  $AB$  est aussi orthogonale :  $(A, B) \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})^2 \implies AB \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ ;
- (iii) si  $A$  est orthogonale,  $A^{-1}$  aussi :  $A \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R}) \implies A^{-1} \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ .

Notons en outre pour ce dernier point que  $A^{-1} = A^T$ .

**PROPOSITION 2.5** — Soit  $u$  une isométrie vectorielle (respectivement  $A$  une matrice orthogonale). Alors  $\det u \in \{-1, 1\}$  ( $\det A \in \{-1, 1\}$ ).

Ce dernier résultat permet de séparer les isométries vectorielles en deux classes : ceux dont le déterminant est égal à 1 (les isométries directes) :  $\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det u = 1\}$ , qui forment eux aussi un groupe, appelé le *groupe spécial orthogonal*, et ceux dont le déterminant est égal à  $-1$  (les isométries indirectes, qui n'ont pas de structure algébrique particulière). On notera bien entendu de même :  $\mathcal{SO}_p(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ .

**Exemple.** Si  $u$  est une réflexion, alors  $\det u = -1$ .

#### Orientation d'un espace euclidien

Considérons l'ensemble  $\mathcal{B}$  des bases orthonormées d'un espace euclidien  $E$ . Si  $(e)$  et  $(e')$  sont deux éléments de  $\mathcal{B}$ ,  $P = \text{Mat}_{(e)}(e')$  est une matrice orthogonale donc  $\det P = \pm 1$ . On définit donc une relation  $\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{B}$  en posant :  $(e) \mathcal{R} (e') \iff \det \text{Mat}_{(e)}(e') = 1$ .

**PROPOSITION 2.6** — La relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence qui possède deux classes d'équivalence distinctes.

**DÉFINITION.** — Orienter l'espace  $E$ , c'est choisir l'une de ces deux classes d'équivalence; les bases orthonormées de cette classe seront qualifiées de bases directes, les autres de bases indirectes.

**Remarque.** Pour orienter l'espace, il suffit de choisir une base  $(e)$  et la qualifier de directe. Une fois ce choix fait, une base orthonormée  $(e')$  sera directe si  $\det_{(e)}(e') = 1$ , et indirecte si  $\det_{(e)}(e') = -1$ .

**PROPOSITION 2.7** — Si l'espace  $E$  est orienté et si  $u \in \mathcal{O}(E)$  est une isométrie vectorielle, alors  $u$  appartient à  $\mathcal{SO}(E)$  si et seulement si l'image par  $u$  d'une base orthonormée directe est une base orthonormée directe. Autrement dit, les isométries directes sont celles qui préservent l'orientation de l'espace.

Une dernière conséquence de la notion de base orthonormée directe est le

**THÉORÈME 2.8** — Si  $(e)$  et  $(e')$  sont deux bases orthonormées directes et  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$  alors  $\det_{(e)}(x_1, \dots, x_p) = \det_{(e')}(x_1, \dots, x_p)$ . Autrement dit, le déterminant d'une famille de vecteurs ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe dans laquelle on réalise le calcul.

## 2.2 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans cette section,  $E$  désigne un plan euclidien orienté,  $(e_1, e_2)$  une base orthonormée directe, et  $u \in \mathcal{O}(E)$ .

Notons  $A = \text{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ .  $A$  est une matrice orthogonale, ce qui se traduit par

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

La première égalité traduit l'existence d'un réel  $\alpha$  (défini de manière unique modulo  $2\pi$ ) tel que  $a = \cos \alpha$  et  $b = \sin \alpha$ . De même, la seconde égalité traduit l'existence d'un réel  $\beta$  pour lequel  $d = \cos \beta$  et  $c = \sin \beta$ .

La troisième égalité s'écrit alors  $\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta = 0$ , soit  $\sin(\alpha + \beta) = 0$ . Ainsi, nous avons  $\beta \equiv -\alpha \pmod{\pi}$ , ce qui laisse deux possibilités (sachant que  $\beta$  est unique modulo  $2\pi$ ) :  $\beta = -\alpha$  ou  $\beta = \pi - \alpha$ .

Les matrices de  $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$  sont donc de deux types uniquement :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{lorsque } \beta = -\alpha) \quad \text{ou} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{lorsque } \beta = \pi - \alpha).$$

$\det A_1 = 1$  et  $\det A_2 = -1$  donc les isométries vectorielles directes sont associées aux matrices de type  $A_1$ , et les isométries indirectes aux matrices de type  $A_2$ .

### ■ Isométries directes du plan euclidien orienté

Nous avons donc  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R(\alpha) \mid \alpha \in [0, 2\pi[ \}$ , où  $R(\alpha)$  désigne la matrice  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .

**PROPOSITION 2.9** —  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$  est un groupe commutatif, et  $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ .

**COROLLAIRE** — Si  $\text{Mat}_{(e)}(u) = R_\alpha$ , la valeur de  $\alpha$  est indépendante du choix de la base orthonormée directe  $(e)$ ; on dit que  $u$  est la rotation d'angle  $\alpha$ .

**Remarque.** Les matrices de  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$  sont aussi les matrices de passage d'une base orthonormée directe à une autre; ainsi nous venons de prouver que nous ne pouvons passer d'une base orthonormée directe à une autre que par l'action d'une rotation.

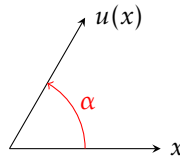
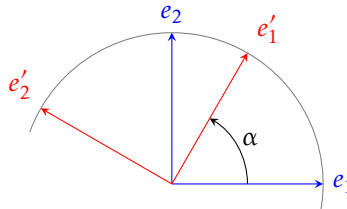
FIGURE 2 – Action d'une rotation vectorielle d'angle  $\alpha$ .

FIGURE 3 – Pasage d'une base orthonormée directe à une autre.

**Comment mesurer l'angle d'une rotation ?**

Si  $x$  est un vecteur non nul, il est toujours possible de construire une base orthonormée directe  $(e_1, e_2)$  telle que  $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$ . On a alors  $u(e_1) = \cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2$  et

$$\langle e_1 | u(e_1) \rangle = \cos \alpha \quad \text{et} \quad \det(e_1, u(e_1)) = \sin \alpha$$

On en déduit deux formules qui permettent de calculer  $\cos \alpha$  et  $\sin \alpha$  et par leur intermédiaire de déterminer l'angle d'une rotation à partir de l'image d'un vecteur non nul quelconque :

$$\cos \alpha = \frac{\langle x | u(x) \rangle}{\|x\|^2} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{\det(x, u(x))}{\|x\|^2}$$

ce dernier déterminant pouvant être calculé dans une base orthonormée directe quelconque.

**■ Isométries indirectes du plan euclidien orienté**

Revenons à la matrice  $A_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$  et cherchons à la diagonaliser.

On calcule sans peine  $\chi_{A_2}(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$  donc  $\text{Sp}(A_2) = \{-1, 1\}$ ; la matrice  $A_2$  est diagonalisable.

On résout  $A_2 X = X \iff X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$  et  $A_2 X = -X \iff X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} -\sin(\alpha/2) \\ \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$

Posons  $P = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) & -\sin(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$ ;  $P$  est la matrice de la rotation d'angle  $\alpha/2$  donc la base  $(e')$  obtenue par

$\text{Mat}_{(e)}(e')$  est une base orthonormée directe dans laquelle  $\text{Mat}_{(e')}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . L'isométrie indirecte  $u \in \mathcal{O}(E)$

est donc une symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur  $e'_2$ .

Nous avons donc prouvé que les isométries indirectes du plan euclidien orienté sont les réflexions, autrement dit les symétries orthogonales par rapports aux droites.

**2.3 Endomorphismes autoadjoints**

**DÉFINITION.** — On dit qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est autoadjoint lorsqu'il vérifie :  $\forall (x, y) \in E^2$ ,

$$\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle.$$

**THÉORÈME 2.10** — Si  $(e)$  est une base orthonormée de  $E$  et  $A = \text{Mat}_e(u)$ , alors  $u$  est autoadjoint si et seulement si  $A^T = A$ , c'est à dire si et seulement si  $A$  est symétrique.



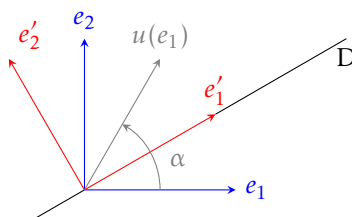


FIGURE 4 – Action d'une réflexion par rapport à la droite D.

**Remarque.** Pour cette raison, un endomorphisme autoadjoint est aussi appelé un endomorphisme *symétrique*, mais cette appellation peut être trompeuse, car si  $(e)$  n'est pas une base orthonormée, la matrice associée dans cette base à un endomorphisme autoadjoint peut ne pas être symétrique.

#### Adjoint d'un endomorphisme (hors programme)

Lorsque  $(e)$  est une base orthonormée de  $E$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A = \text{Mat}_{(e)}(u)$  on a

$$\langle u(x) | y \rangle = (AX)^T Y = X^T (A^T Y) = \langle x | u^*(y) \rangle$$

où  $u^*$  est l'endomorphisme défini par  $\text{Mat}_{(e)}(u^*) = A^T$ . Cet endomorphisme est appelé l'*adjoint* de l'endomorphisme  $u$  (il est facile de montrer que sa définition ne dépend pas du choix de la base orthonormée  $(e)$ ). On comprend dès lors la dénomination des endomorphismes autoadjoints : les endomorphismes  $u \in \mathcal{L}(E)$  qui vérifient  $u^* = u$ .

**PROPOSITION 2.11** — L'ensemble  $\mathcal{S}(E)$  des endomorphismes autoadjoints de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ , de dimension  $\frac{p(p+1)}{2}$ .

#### Exercice 5

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes autoadjoints. Montrer que  $u \circ v$  est autoadjoint si et seulement si  $u \circ v = v \circ u$ .

### ■ Réduction des endomorphismes autoadjoints

De nombreuses applications des endomorphismes autoadjoints résultent du fait que ce sont les seuls endomorphismes diagonalisables dans les bases orthonormées, résultat que nous allons nous attacher à prouver maintenant.

**PROPOSITION 2.12** — Si  $u$  est un endomorphisme autoadjoint, ses sous-espaces propres sont en somme directe orthogonale.

**PROPOSITION 2.13** — Soit  $H$  un espace vectoriel stable par un endomorphisme autoadjoint  $u$ . Alors  $H^\perp$  est aussi stable par  $u$ .

**LEMME** — Un endomorphisme autoadjoint possède au moins une valeur propre réelle.

**THÉORÈME 2.14 (théorème spectral)** — Un endomorphisme autoadjoint est diagonalisable dans une base orthonormée.

**COROLLAIRE** — Si  $A$  est une matrice symétrique, il existe une matrice diagonale  $D$  et une matrice orthogonale  $P$  telles que  $A = PDP^T$  (rappelons que  $P^{-1} = P^T$ ).

#### Exercice 6

Diagonaliser sur une base orthonormée la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

## 2.4 Formes bilinéaires symétriques

Nous allons maintenant revenir à la définition d'un produit scalaire : une forme bilinéaire, symétrique, définie positive.

Commençons par considérer une forme bilinéaire  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $E$  est un espace euclidien.

Si  $(e)$  est une base orthonormée de  $E$ , posons  $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$  et  $y = \sum_{j=1}^p y_j e_j$ . Alors :

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p x_i y_j b(e_i, e_j) = X^T B Y \quad \text{avec} \quad B = (b(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq p}$$

Si on suppose de plus  $b$  symétrique alors  $b(e_i, e_j) = b(e_j, e_i)$  donc  $B \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ .

Notons  $u \in \mathcal{S}(E)$  l'endomorphisme autoadjoint défini par  $\text{Mat}_{(e)}(u) = B$ . Nous avons démontré que toute forme bilinéaire symétrique de  $E$  s'écrit de manière unique sous la forme  $(x, y) \mapsto \langle x | u(y) \rangle$  avec  $u \in \mathcal{S}(E)$ .

D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée  $(e')$  formée de vecteurs propres de  $u$ . En notant  $P \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$  la matrice de passage de  $(e)$  vers  $(e')$  et en posant  $X' = P^T X$  et  $Y' = P^T Y$  on a  $b(x, y) = X'^T D Y'$  avec

$$D = \text{Mat}_{(e')}(u) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \quad \text{soit} \quad b(x, y) = \sum_{k=1}^p \lambda_k x'_k y'_k.$$

En particulier,  $b(x, x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k'^2$  donc :

- $b$  est positive lorsque pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\lambda_k \geq 0$ , soit  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$  ;
- $b$  est définie positive lorsque pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\lambda_k > 0$ , soit  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ .

**DÉFINITION.** — Un endomorphisme autoadjoint  $u \in \mathcal{S}(E)$  est dit positif lorsque pour tout  $x \in E$ ,  $\langle x | u(x) \rangle \geq 0$  ; un endomorphisme autoadjoint  $u \in \mathcal{S}(E)$  est dit défini positif lorsque pour tout  $x \in E \setminus \{0_E\}$ ,  $\langle x | u(x) \rangle > 0$ .

On note  $\mathcal{S}^+(E)$  l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs et  $\mathcal{S}^{++}(E)$  celui des endomorphismes autoadjoints définis positifs.

**THÉORÈME 2.15** — Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$  un endomorphisme autoadjoint. Alors :

- $u$  est positif si et seulement si  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$  ;
- $u$  est défini positif si et seulement si  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ .

Traduits matriciellement ces résultats donnent :

**THÉORÈME 2.16** — Soit  $A \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$  une matrice symétrique. Alors :

- $(\forall X \in \mathbb{R}^p, X^T A X \geq 0)$  si et seulement si  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$  ;
- $(\forall X \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}, X^T A X > 0)$  si et seulement si  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ .

On note  $\mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques positives, et  $\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$  celui des matrices symétriques définies positives.

### Application à la réduction d'une forme quadratique

Considérons une forme quadratique  $q : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \end{pmatrix}$ . Nous aurons besoin dans le chapitre consacré aux fonctions à plusieurs variables de déterminer si une telle fonction garde un signe constant ou non.

Observons que  $q(x_1, x_2) = X^T A X$  où  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ . La matrice  $A$  étant symétrique se diagonalise dans

une base orthonormée :  $A = P D P^T$  où  $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ . En posant  $X' = P^T X = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$  on a alors

$q(x_1, x_2) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2$  donc :

- si  $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ , pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $q(x_1, x_2) > 0$ ;
- si  $A \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ , pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $q(x_1, x_2) \geq 0$ .

### Matrices de Gram

On appelle *matrice de Gram* toute matrice  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  qui s'écrit  $A = M^T M$  avec  $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

Une matrice de Gram est bien évidemment symétrique :  $A^T = (M^T M)^T = M^T M = A$  ; de plus, ses valeurs propres sont positives. En effet, s'il existe  $X \neq 0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que  $AX = \lambda X$  alors :

$$\lambda \|X\|^2 = \lambda X^T X = X^T A X = X^T M^T M X = (M X)^T (M X) = \|M X\|^2 \quad \text{donc } \lambda = \frac{\|M X\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$$

Le fait remarquable réside dans la réciproque :

**PROPOSITION 2.17** — Une matrice  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  est symétrique positive si et seulement s'il existe  $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  telle que  $A = M^T M$ . De plus,  $A$  est définie positive si et seulement si  $M \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R})$ .