Chapitre II
Réduction des endormorphismes

Réduire un endomorphisme, c'est trouver une base dans laquelle la matrice associée à cet endomorphisme est la plus simple possible, de manière à faciliter les calculs que l'on peut être amené à effectuer sur celui-ci. La réduction sans doute la plus utilisée en dimension finie est la réduction de Jordan, qui décompose l'espace en somme directe de sous-espaces stables, l'endomorphisme agissant de manière très simple sur chacun de ces sous-espaces.

Nous supposerons les deux modules `numpy` et `numpy.linalg` importés par le biais des instructions :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
```

1. Introduction

Nous allons commencer par observer l'action de la réduction de Jordan sur un exemple, pour apprécier l'intérêt qu'il y a à réduire un endomorphisme.

Exemple. Considérons l'endomorphisme u de $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$ défini par sa matrice sur la base canonique (e) :

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{A}$$

Nous allons effectuer le changement de base sur la base (e') définie par la matrice de passage :

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(e') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{P}$$

Bien entendu, nous ne savons pas pour l'instant comment ont été trouvés ces vecteurs formant la nouvelle base ; c'est là tout l'enjeu de ce chapitre. Mais nous pouvons déjà observer le résultat de ce changement de base :

```
A = np.array([ [ 5,  4,  2,  1],
               [ 0,  1, -1, -1],
               [-1, -1,  3,  0],
               [ 1,  1, -1,  2] ])

P = np.array([ [-1,  0,  1, -1],
               [ 0,  0, -1,  1],
               [ 1, -1,  0,  0],
               [-1,  1,  1,  0] ])
```

```
In [1]: alg.inv(P) @ A @ P
Out[1]:
[[ 4.  1.  0.  0.]
 [ 0.  4.  0.  0.]
 [ 0.  0.  2.  0.]
 [ 0.  0.  0.  1.]]
```

Nous obtenons $\mathrm{Mat}_{(e')}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{2} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{matrix} \end{pmatrix}$. Cette nouvelle matrice est constituée de trois blocs diagonaux,

qui correspondent à la décomposition de l'espace en trois sous-espaces stables : $E = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ avec $H_1 = \mathrm{Vect}(e'_1, e'_2)$, $H_2 = \mathrm{Vect}(e'_3)$, $H_3 = \mathrm{Vect}(e'_4)$.
Sur les droites vectorielles H_2 et H_3 l'endomorphisme u agit comme une homothétie :

$$\forall x \in H_2,\ u(x) = 2x, \qquad \forall x \in H_3,\ u(x) = x.$$

Sur le plan vectoriel H_1, l'action de u est un peu plus compliquée : c'est l'addition d'une homothétie de rapport 4 et d'un endomorphisme *nilpotent* v défini par $v(e'_1) = 0_E$ et $v(e'_2) = e'_1$:

$$\forall x \in H_1,\ u(x) = 4x + v(x) \qquad \text{avec } v^2(x) = 0_E.$$

Il est beaucoup plus facile de travailler avec la base (e') qu'avec la base (e) ; par exemple, le calcul de u^n s'obtient très simplement dans la base (e') :

$$\forall x \in H_1,\ u^n(x) = 4^n x + n4^{n-1}x, \qquad \forall x \in H_2,\ u^n(x) = 2^n x, \qquad \forall x \in H_3,\ u^n(x) = x$$

égalités qui se traduisent matriciellement par : $A^n = P\begin{pmatrix} 4^n & n4^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}P^{-1}$.

Exercice 1

On considère l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ défini par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les droites vectorielles stables par u, et en déduire une base (e) de $\mathbb{K}^3$ pour laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est diagonale.

2. Éléments propres

Dans l'exemple introductif que nous venons de traiter, sur deux des sous-espaces de la décomposition (H_2 et H_3) l'endomorphisme agit comme une homothétie. Ce sont ces sous-espaces particuliers qui vont nous intéresser.

2.1 Valeurs et vecteurs propre

Dans cette section, sauf mention explicite du contraire, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension finie ou non.

Définition. — *On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une* valeur propre *d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ lorsqu'il existe un vecteur* non nul *$x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Dans ce cas, on dit que x est un* vecteur propre *associé à la valeur propre λ.*

On note $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u ; c'est le *spectre* de u.

Définition. — *Si λ est une valeur propre de u, on note $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$; il s'agit du* sous-espace propre *associé à la valeur propre λ. C'est un sous-espace vectoriel de E stable par u.*

Attention. Le vecteur nul n'est pas un vecteur propre ; les vecteurs propres associés à une valeur propre λ sont les éléments *non nuls* du sous-espace propre $E_\lambda(u)$, sous-espace qui est au moins de dimension 1.

Remarque. La restriction de u au sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ.

Exercice 2

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $D : f \mapsto f'$ l'opérateur de dérivation. Déterminer les éléments propres (valeurs et vecteurs propres) de D.

Théorème 2.1 — *Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u, la somme $E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}(u)$ est directe.*

Chacun de ces sous-espaces propres étant au minimum de dimension 1, on en déduit :

Corollaire — *Si E est un espace vectoriel de dimension finie p, tout endomorphisme a* au plus *p valeurs propres distinctes.*

■ Traduction matricielle en dimension finie

Considérons maintenant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, et (e) une base de E. L'égalité $u(x) = \lambda x$ se traduit matriciellement par $AX = \lambda X$, où $A = \mathrm{Mat}_{(e)}(u) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $X = \mathrm{Mat}_{(e)}(x) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, ce qui nous amène aux définitions suivantes (rappelons que l'espace des matrices colonnes $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est identifié à $\mathbb{K}^p$) :

Définition. — *Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une* valeur propre *de A lorsqu'il existe un vecteur non nul $x \in \mathbb{K}^p$ tel que $Ax = \lambda x$. Le vecteur x est un* vecteur propre *associé à la valeur propre λ. En outre, on appelle* sous-espace propre *associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel :*

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \left\{ x \in \mathbb{K}^p \;\middle|\; Ax = \lambda x \right\}.$$

D'après le corollaire du théorème 2.1, une matrice $p \times p$ ne peut avoir plus de p valeurs propres distinctes.

Il y a bien entendu parfaite équivalence entre éléments spectraux d'un endomorphisme et éléments spectraux d'une matrice qui lui est associée par le choix d'une base.

Proposition 2.2 — *Un scalaire λ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ si et seulement si* $\det(A - \lambda I) = 0$.

Ce dernier résultat nous indique la démarche à suivre pour étudier les éléments propres en dimension finie :

1. déterminer les valeurs propres de A en résolvant l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$;
2. pour chaque valeur propre λ, résoudre le système linéaire $(A - \lambda I)X = 0$ pour déterminer une base du sous-espace propre correspondant ;
3. Lorsque cela est possible, construire une base formée de vecteurs propres, et établir la formule de changement de base $A = PDP^{-1}$.

Exercice 3

Déterminer les éléments propres des matrices suivantes et le cas échéant, former une base de vecteurs propres :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 \\ 6 & -6 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2 Polynôme caractéristique

En dimension finie, nous venons de constater que déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ revient à résoudre l'équation $\det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$. Nous allons nous intéresser à la nature de cette équation, en démontrant qu'il s'agit d'une équation *polynomiale*.

Considérons une base quelconque (e) de E, et $A = \mathrm{Mat}_e(u) = (a_{ij})$. Alors :

$$\det(x\mathrm{Id}_E - u) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1p} \\ -a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{p-1,p} \\ -a_{p1} & \cdots & -a_{p,p-1} & x - a_{pp} \end{vmatrix}$$

Théorème 2.3 — *L'application* $x \mapsto \det(x\mathrm{I} - \mathrm{A})$ *est une fonction polynomiale ; le polynôme qui lui est associé est un polynôme unitaire de degré n appelé* polynôme caractéristique *de la matrice* A. *Il est noté* χ_{A}.

Remarque. Le déterminant d'un endomorphisme ne dépendant pas de la base choisie pour effectuer le calcul, on définit de même le *polynôme caractéristique* d'un endomorphisme : le polynôme canoniquement associé à la fonction polynomiale $x \mapsto \det(x\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - u)$.

Exemple. Lorsque $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$\chi_{\mathrm{A}}(x) = \begin{vmatrix} x-a & -c \\ -b & x-d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 - (\mathrm{tr}\,\mathrm{A})x + \det \mathrm{A}.$$

Remarque. Pour une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de taille $p \times p$, le coefficient constant de χ_{A} est égal à $(-1)^p \det \mathrm{A}$ et le coefficient de X^{p-1} égal à $-\mathrm{tr}\,\mathrm{A}$.

Exercice 4

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $p \geqslant 2$ une matrice de rang 1. Déterminer son polynôme caractéristique.

■ Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Définition. — *les valeurs propres d'un endomorphisme u sont les racines de son polynôme caractéristique. On appelle* ordre de multiplicité *d'une valeur propre son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.*

Proposition 2.4 — *Lorsque le polynôme caractéristique est scindé, notons* $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ *les valeurs propres de* u*, en répétant autant de fois que sa multiplicité chacune des valeurs propres. Alors* $\det u = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k$ *et* $\mathrm{tr}\, u = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k$.

Enfin, on notera qu'il existe un lien entre ordre de multiplicité de la valeur propre et la dimension du sous-espace propre correspondant :

Théorème 2.5 — *La dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.*

Ce résultat a plusieurs conséquences intéressantes. Considérons par exemple une valeur propre simple (c'est à dire de multiplicité égale à 1). Le sous-espace propre associé n'étant pas réduit à $\{0_{\mathrm{E}}\}$, on en déduit qu'il est obligatoirement de dimension 1.
Nous verrons d'autres conséquences de ce résultat dans les sections suivantes.

2.3 Diagonalisation en dimension finie

Dans toute cette section on suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p.

Définition. — *Un endomorphisme* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *est dit* diagonalisable *lorsqu'il existe une base* (e) *dans laquelle la matrice* $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ *est diagonale.*

Traduction matricielle

Considérons une base *quelconque* (e), et $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{(e)}(u)$. u est diagonalisable s'il existe une base (e') telle que $\mathrm{D} = \mathrm{Mat}_{(e')}(u)$ est diagonale. Si on note $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{(e)}(e')$ la matrice de passage de (e) vers (e') nous disposons de la relation : $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$, qu'on peut écrire $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Ceci conduit à la définition :

Définition. — *Une matrice carrée* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *est dite* diagonalisable *lorsqu'il existe une matrice inversible* $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ *telle que* $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

Exemple. Les matrice A_1 et A_2 de l'exercice 3 sont diagonalisables : nous avons dans les deux cas trouvé une base formée de vecteurs propres.

Exercice 5

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure dans laquelle tous les coefficients diagonaux sont égaux. Peut-elle être diagonalisable ?

Remarque. Lorsqu'un endomorphisme u est diagonalisable, la base (e) pour laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est diagonale est constituée de vecteurs propres. Dès lors, on ne s'étonnera pas des nombreuses définitions équivalentes que l'on va obtenir en faisant intervenir la théorie spectrale.

Théorème 2.6 — *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E, et $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ le spectre de u. Alors u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_{\lambda_k}(u)$.*

Corollaire — *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E, $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ le spectre de u. Alors u est diagonalisable si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{E}_{\lambda_i}(u) = \dim \mathrm{E}$.*

Exemple. La matrice A_3 de l'exercice 3 n'est pas diagonalisable. Nous n'avons trouvé que deux sous-espaces propres, chacun de dimension 1.

Corollaire — *Un endomorphisme u de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps de base $\mathbb{K}$, et si pour toute valeur propre la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.*

Exemple. Reprenons une nouvelle fois les exemples de l'exercice 3 :

- le polynôme caractéristique de A_1 est égal à $(X-1)(X-2)(X-3)$; A_1 possède trois sous-espaces propres de dimension 1 donc A_1 est diagonalisable ;
- le polynôme caractéristique de A_2 est égal à $(X-2)^2(X-4)$; le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 2, celui associé à la valeur propre 4 de dimension 1, donc A_2 est diagonalisable ;
- le polynôme caractéristique de A_3 est égal à $(X-2)^2(X-4)$; le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 1 donc A_3 n'est pas diagonalisable.

Un cas particulier

Lorsque E est de dimension p et lorsque u possède p valeurs propres distinctes, chacun des sous-espaces propres est de dimension au moins égale à 1 donc la somme des sous-espaces propres est au moins de dimension p. Ceci prouve que la somme de ces sous-espaces propres est égale à E, donc u est diagonalisable, et indique en plus que chacun de ces sous-espaces propres est de dimension 1. C'est le cas par exemple de la matrice A_1.
Cette situation n'est pas caractéristique de tous les endomorphismes diagonalisables (comme le montre par exemple la matrice A_2), mais quand elle se produit, nous donne une façon simple de justifier que l'endomorphisme est diagonalisable :

Proposition 2.7 — *Si E est de dimension p et si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ possède p valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable.*

Exercice 6

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la matrice $M(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est diagonalisable, sauf pour deux valeurs de z qu'on précisera.

Attention. Pour finir cette section, observons que la dernière caractérisation de la diagonalisation fait intervenir le corps de base $\mathbb{K}$. Lorsqu'il s'agit de diagonaliser un endomorphisme, le corps de base est imposé par l'espace vectoriel, mais lorsqu'il s'agit de diagonaliser une matrice à coefficients réels, il est possible de la considérer comme un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *mais aussi comme un élément de* $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. En d'autres termes, une matrice à coefficients réels peut être diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ sans être diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Considérons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $\chi_A = (X-1)^2 + 1$, donc A n'a pas de valeurs propres réelles : elle n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En revanche, elle dispose de deux valeurs propres complexes distinctes $1-i$ et $1+i$ donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2.4 Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable

Considérons une projection vectorielle $p \in \mathcal{L}(E)$ sur H_1 parallèlement à H_2 : on a $E = H_1 \oplus H_2$, et dans une base (e) adaptée à cette décomposition on a

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(p) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \\ & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme p est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(p) = \{0,1\}$, et $H_1 = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ et $H_2 = \mathrm{Ker}\, p$ sont les sous-espaces propres associés.

On peut de même considérer la symétrie vectorielle $s \in \mathcal{L}(E)$ par rapport à H_1, parallèlement à H_2 : sur la même base (e) on a cette fois

$$\mathrm{Mat}_{(s)}(s) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \\ & \begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme s est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(s) = \{-1,1\}$, $H_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $H_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
Observons enfin que $s = p - (\mathrm{Id}_E - p) = 1 \times p_1 + (-1) \times p_2$, où $p_1 = p$ est la projection vectorielle sur H_1 parallèlement à H_2 et $p_2 = \mathrm{Id}_E - p$ est la projection vectorielle sur H_2 parallèlement à H_1.

Considérons enfin un endomorphisme diagonalisable $u \in \mathcal{L}(E)$, et la décomposition de E en somme des sous-espaces propres : $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}(u)$. Si (e) est une base adaptée à la décomposition de l'espace, nous avons :

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} \lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{matrix} \end{pmatrix}$$

La famille $(p_1, \dots, p_k)$ associée à cette décomposition de l'espace est appelée la famille des *projecteurs spectraux* de u. Rappelons que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, p_i est la projection sur $E_{\lambda_i}(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(u)$. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_e(p_i) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \longleftarrow i^{\text{e}} \text{ bloc}$$

On dispose alors de manière évidente des égalités $\mathrm{Id}_E = \sum_{j=1}^{k} p_j$ et $u = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j p_j$, et plus généralement :

Proposition 2.8 — *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a* $\boxed{u^n = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^n p_j.}$

Remarque. Lorsque u est inversible (c'est à dire lorsque 0 n'est pas valeur propre de u) cette formule s'étend sur $\mathbb{Z}$.

interprétation matricielle
Considérons la diagonalisation de la matrice A_1 obtenue dans l'exercice 3 : $A_1 = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

Dans la base de diagonalisation, les trois projecteurs spectraux sont associés aux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la base initiale, les trois projecteurs spectraux sont donc associés aux matrices

$$U = P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, \quad V = P\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, \quad W = P\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

On a $I = U + V + W$, $A_1 = U + 2V + 3W$, et plus généralement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_1^n = P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^n & \\ & & 3^n \end{pmatrix}P^{-1} = U + 2^n V + 3^n W$; le calcul des matrices U, V et W permet donc d'exprimer aisément A_1^n.
Définissons en Python les trois matrices associés aux projecteurs spectraux de A_1 :

```
P = np.array([ [-1, -2, -1],
               [ 2,  0,  1],
               [ 0,  1,  0] ])

U = P @ np.diag([1, 0, 0]) @ alg.inv(P)
V = P @ np.diag([0, 1, 0]) @ alg.inv(P)
W = P @ np.diag([0, 0, 1]) @ alg.inv(P)
```

Vérifions la validité de la formule $A_1^n = U + 2^n V + 3^n W$ pour $n = 5$:

```
In [1]: U + 2**5 * V + 3**5 * W
Out[1]: array([[ 485.,  242.,  906.],
               [-484., -241., -968.],
               [   0.,    0.,   32.]])

In [2]: alg.matrix_power(A1, 5)
Out[2]: array([[ 485,  242,  906],
               [-484, -241, -968],
               [   0,    0,   32]])
```

Exercice 7

On considère la matrice A_2 de l'exercice 3. Justifier l'existence (mais sans les calculer) de deux matrices U et V telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_2^n = 2^n U + 4^n V$.
Montrer que ces matrices U et V peuvent s'exprimer en fonction des matrices I et A, et en déduire une expression de A^n en fonction de I et de A.

Application à la recherche du commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Considérons un endomorphisme u diagonalisable, et posons $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Nous allons chercher à caractériser le *commutant* de u, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes $v \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifient : $u \circ v = v \circ u$.
Le raisonnement que nous allons tenir tient essentiellement au fait suivant :

$$\text{pour tout } x \in E_{\lambda_i}(u), \quad u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) = v(\lambda_i x) = \lambda_i v(x)$$

égalité qui montre que pour tout $x \in E_{\lambda_i}(u)$, $v(x) \in E_{\lambda_i}(u)$: *le sous-espace propre* $E_{\lambda_i}(u)$ *est stable par* v.
Ceci montre que dans une base adaptée à la décomposition de l'espace en somme de sous-espaces propres, la matrice associée à v est diagonale par blocs.
Bref, dans une telle base nous avons :

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I} & & \\ & \boxed{\lambda_2 I} & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda_k I} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{(e)}(v) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \boxed{A_2} & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

Réciproquement, il est évident que ces deux matrices (et donc les endomorphismes u et v) commutent. Nous avons donc prouvé la

Proposition 2.9 — *Si u est un endomorphisme diagonalisable, les endomorphismes qui commutent avec u sont ceux qui laissent stables les sous-espaces propres.*

Corollaire — *Lorsque le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples, le commutant est un espace de dimension $p = \dim E$, et les projecteurs spectraux de u en constituent une base.*

Exercice 8

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice admettant -1 et 8 pour valeurs propres. Justifier l'existence d'une unique matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $B^3 = A$, puis exprimer B en fonction de I et de A.

2.5 Matrices et endomorphismes trigonalisables

Nous n'avons pour l'instant pas abordé le cas des endomorphismes non diagonalisables car ce n'est pas un des objectifs principaux de ce cours, mais nous en avons vu un exemple avec la matrice A_3 de l'exercice 3. Nous allons montrer maintenant qu'à défaut d'être diagonalisable, cette matrice est *trigonalisable*, c'est-à-dire semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 9

Trouver une matrice inversible P telle que $A_3 = P\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}P^{-1}$.

Ceci nous amène aux définitions suivantes :

Définition. — *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit* trigonalisable *s'il existe une base de E dans laquelle la matrice associée à u est triangulaire supérieure.*
Une matrice A est dite trigonalisable *si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est à dire s'il existe une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible P telles que $A = PTP^{-1}$.*

Le résultat majeur dont on dispose est le suivant :

Théorème 2.10 — *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ (ou une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.*

Remarque. Puisque tout polynôme complexe est scindé, une conséquence importante de ceci est que toute matrice est trigonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, mais pas nécessairement dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

2.6 Polynômes annulateurs (notion hors programme)

Sur $\mathcal{L}(E)$ l'opérateur de composition $(u,v) \mapsto u\circ v$ est *associatif*, c'est-à-dire vérifie la relation $u\circ(v\circ w) = (u\circ v)\circ w$. Cette propriété permet de définir sans ambigüité l'endomorphisme u^n ($n \in \mathbb{N}$) en convenant que $u^0 = \mathrm{Id}$ et $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$.
Ceci permet, à partir d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, de définir l'endomorphisme $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$.
Nous pouvons déjà énoncer un premier résultat, qui généralise la proposition 2.8 :

Proposition 2.11 — *Si u est un endomorphisme diagonalisable et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme, alors $P(u)$ est diagonalisable. De plus, si $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}$ alors $\mathrm{Sp}(P(u)) = \{P(\lambda_1),\dots,P(\lambda_k)\}$, et si $p_1,\dots,p_k$ sont les projecteurs spectraux de u alors $P(u) = \sum_{j=1}^{k} P(\lambda_j)p_j$.*

Traduit matriciellement, ce résultat s'énonce de la façon suivante :

Corollaire — *Si A est une matrice diagonalisable et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme, alors P(A) est diagonalisable et*

$$A = Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p\end{pmatrix}Q^{-1} \quad\Longrightarrow\quad P(A) = Q\begin{pmatrix}P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_p)\end{pmatrix}Q^{-1}.$$

Définition. — *On appelle* polynôme annulateur *de $u \in \mathcal{L}(E)$ un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.*

La proposition 2.11 montre que si u est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}$, le polynôme $P = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_k)$ est un polynôme scindé et à racines simples de u, annulateur de u. Le théorème 2.13 que nous verrons plus loin (mais qui est hors programme) énonce une réciproque de ce résultat, mais nous pouvons déjà énoncer un résultat simple et utilisable en restant dans le cadre du programme de PC* :

Proposition 2.12 — *Si P est un polynôme annulateur de u, toute valeur propre de u est racine de P.*

Mais le résultat majeur (hors programme, rappelons-le) est le résultat suivant :

Théorème 2.13 — *Soit E est $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme qui possède un polynôme annulateur scindé à racines simples. Alors u est diagonalisable.*

On notera qu'il existe des exercices simples qui demandent de prouver ce résultat dans des cas particuliers, et qui se traitent par analyse / synthèse. par exemple :

Exercice 10

Soit u un endomorphisme de E tel que $u^3 + u = 0$. Montrer que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$.
Montrer que lorsque E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on a en plus $\operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(u - i\mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(u + i\mathrm{Id})$.

Ce théorème permet d'aborder le problème de la diagonalisation avec une approche différente de celle que nous sommes amenés à utiliser pour rester dans le cadre du programme, et propose dans certains cas des preuves bien plus simples, en particulier pour prouver le résultat suivant :

Proposition 2.14 — *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme diagonalisable,* H *un sous-espace vectoriel de* E *stable par* u, *et* $u_{\mathrm{H}} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *la restriction de* u *à* H. *Alors* u_{H} *est un endomorphisme diagonalisable de* H.

3. Récurrences linéaires à coefficients constants

La dernière partie de ce chapitre va être consacrée à une application de la réduction des endomorphismes : la résolution des récurrences linéaires à coefficients constants, autrement dit, trouver une expression de u_n en fonction de n lorsque la suite u est définie par la donnée de p valeurs $u_0, \dots, u_{p-1}$ et d'une relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1}.$$

Pour résoudre ce type d'équation, on introduit le vecteur $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$. Ce dernier vérifie la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{X}_n.$$

Ainsi nous avons $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{X}_0$, et le problème se ramène au calcul des puissances de la matrice A.

3.1 Étude du cas $p = 2$

Avant de traiter le cas général nous allons nous intéresser au cas où $p = 2$, autrement dit aux suites définies par la donnée de u_0 et u_1 et de la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1}$.
En posant $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ nous avons $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{X}_n$ avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix}$, et $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{X}_0$.
On calcule $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\mathrm{X} - a_1) - a_0 = \mathrm{X}^2 - a_1 \mathrm{X} - a_0$. Trois cas sont donc possibles :

Lorsque χ_{A} possède deux racines distinctes $\lambda \neq \mu$.
Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples donc A est diagonalisable : il existe une matrice inversible $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$. Introduisons les projecteurs spectraux $\mathrm{U} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$ et $\mathrm{V} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$ dans ce calcul : alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^n = \lambda^n \mathrm{U} + \mu^n \mathrm{V}$.

Ainsi, $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{X}_0 = \lambda^n \mathrm{U}\mathrm{X}_0 + \mu^n \mathrm{V}\mathrm{X}_0$. En posant $\mathrm{U}\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix}$ et $\mathrm{V}\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta' \end{pmatrix}$ nous avons prouvé l'existence de deux constantes α et β telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n.}$

Remarque. Les constantes α et β dépendent du vecteur X_0 donc des valeurs initiales u_0 et u_1. Et en effet elles sont le plus souvent obtenues à partir des relations $u_0 = \alpha + \beta$ et $u_1 = \alpha\lambda + \beta\mu$ qui fournissent les égalités :

$$\alpha = \frac{u_1 - \mu u_0}{\lambda - \mu} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{u_1 - \lambda u_0}{\mu - \lambda}.$$

Lorsque χ_A possède une racine double λ.
La matrice A n'est pas diagonalisable (en effet, un endomorphisme diagonalisable ayant une seule valeur propre est nécessairement une homothétie vectorielle). En revanche, puisque $\chi_A = (X-\lambda)^2$ est scindé, la matrice A est trigonalisable : il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $A = P\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}P^{-1}$. Posons $U = P\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$; alors $A = \lambda I + U$. Or il est facile de prouver par récurrence que $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \lambda^n I + n\lambda^{n-1}U$.
Ainsi, $X_n = \lambda^n X_0 + n\lambda^{n-1}UX_0$ et en posant $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix}$ et $UX_0 = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta' \end{pmatrix}$ nous avons prouvé l'existence de deux constantes α et β telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^{n-1}.}$

Remarque. Là encore les constantes α et β se déterminent à partir des relations initiales $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \alpha\lambda + \beta$ qui fournissent les égalités :

$$\alpha = u_0 \qquad \text{et} \qquad \beta = u_1 - \lambda\alpha_0.$$

Lorsque χ_A ne possède pas de racine.
Cette situation ne peut arriver que lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$. Mais dans ce cas, le polynôme réel χ_A possède deux racines complexes conjuguées distinctes λ et $\mu = \overline{\lambda}$. Le premier cas s'applique et on peut affirmer l'existence de deux constantes complexes α et β telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha\lambda^n + \beta\overline{\lambda}^n$.
Pour calculer les puissances d'un nombre complexe il est préférable que ce dernier soit écrit sous forme trigonométrique, aussi allons-nous poser $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \rho^n(\alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta}) = \rho^n\big((\alpha+\beta)\cos(n\theta) + i(\alpha-\beta)\sin(n\theta)\big)$$

En posant $a = \alpha + \beta$ et $b = i(\alpha - \beta)$ nous avons prouvé l'existence de deux constantes a et b telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = a\rho^n\cos(n\theta) + b\rho^n\sin(n\theta).}$

Remarque. Les conditions initiales $u_0 = a$ et $u_1 = a\rho\cos\theta + b\rho\sin\theta$ fournissent les égalités

$$a = u_0 \qquad \text{et} \qquad b = \frac{u_1 - u_0\rho\cos\theta}{\rho\sin\theta}$$

qui montrent au passage que les constantes a et b sont forcément réelles.

3.2 Le cas général

Revenons maintenant au cas général, en suivant la même démarche que le cas $p = 2$. La première étape consiste à déterminer les éléments propres de la matrice suivante, appelée *matrice compagne* :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$$

Théorème 3.1 — *Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme $X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \cdots - a_1X - a_0$. En outre, tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.*

Lorsque le polynôme χ_A possède p racines distinctes.
Notons ces racines $\lambda_1,\dots,\lambda_p$. La matrice A est diagonalisable, et en notant $U_1,\dots,U_p$ les matrices des projecteurs spectraux associés on obtient $A^n = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n U_k$ puis $X_n = A^n X_0 = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n U_k X_0$.
En notant $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ les premières composantes de chacun des vecteurs $U_1X_0,\dots,U_pX_0$ nous avons prouvé l'existence de constantes $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \alpha_1\lambda_1^n + \cdots + \alpha_p\lambda_p^n.}$
Comme pour la dimension 2, ces constantes se déterminent à partir des conditions initiales $u_0,\dots,u_{p-1}$.

Dans les autres cas.
La poursuite de cette étude nécessiterait de connaître la réduction de Jordan de la matrice A en fonction des multiplicités des racines du polynôme caractéristique, puisque la matrice A n'est plus diagonalisable. Nous nous en tiendrons donc là.