Semaine 20 du 9 au 13 mars 2026

Fonctions de plusieurs variables

Calcul différentiel

Définition de la différentielle. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert, on dit que f admet une différentielle en $a \in \mathcal{U}$ lorsqu'il existe une application linéaire notée $\mathrm{d}f(a)$ telle que $f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a).h + \mathrm{o}(\|h\|)$.
Définition du gradient $\nabla f(a)$ lorsque f est à valeurs réelles.

Dérivées partielles. Si f possède une différentielle en a, f admet en a des dérivées partielles, et $\mathrm{d}f(a).h = \sum_{k=1}^{p} \partial_k f(a) h_k$.

Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ admet en tout point de $\mathcal{U}$ des dérivées partielles continues alors f admet en tout point une différentielle. On dit alors que f est de classe $\mathscr{C}^1$ (résultat admis).
Dérivées partielles d'ordre 2, théorème de Schwarz (résultat admis), matrice hessienne $\mathrm{H}_f(a)$ pour une fonction à valeurs réelles.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)^{\mathrm{T}}.h + \frac{1}{2} h^{\mathrm{T}} \mathrm{H}_f(a) h + \mathrm{o}(\|h\|^2)$.

Règle de la chaîne. Dérivation de $\phi(t) = f(x_1(t), \dots, x_p(t))$.
Application au calcul du gradient en coordonnées polaires, à la résolution d'équations aux dérivées partielles (on donne le changement de variable).

Extremum local. Si $\mathcal{U}$ est ouvert et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et possède un extremum local en $a \in \mathcal{U}$ alors $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Condition suffisante d'extremum local (ou de non extremum) à l'aide des valeurs propres la matrice hessienne, lorsque celle-ci n'est pas dégénérée.

Extremum global. Si $\mathcal{K}$ est fermé et borné, toute fonction continue $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Utilisation de ces deux résultats pour déterminer les extremums d'une fonction continue sur $\mathcal{K}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathring{\mathcal{K}}$.

Cette semaine de colle est la dernière de l'année. Je remercie les interrogateurs qui, une fois de plus, ont bien voulu m'assister dans cette tâche, et je vous donne rendez-vous à la fin de l'année scolaire pour la préparation aux oraux.

Exercices à préparer pour les séances de TD

Les exercices 6, 9, 10, 14, 16, 23 de la fiche « Calcul différentiel ».