PC* - 20

Semaine du 15 au 19 mars 2021

Fonctions de plusieurs variables

Topologie d'un espace vectoriel normé

Ouverts et fermés, intérieur et adhérence, frontière.
Dans un espace vectoriel de dimension finie les sous-espaces vectoriels sont fermés.

Continuité des fonctions à plusieurs variables

Étude locale d'une application, caractérisation séquentielle.
L'image réciproque d'un ouvert / fermé par une application continue est un ouvert / fermé.
Une application continue définie sur une partie fermée et bornée et à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes (résultat admis).
Fonctions lipschitziennes.
En dimension finie, toute application linéaire/bilinéaire/n-linéaire est continue.

Calcul différentiel

Définition de la différentielle. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert, on dit que f admet une différentielle en $a \in \mathcal{U}$ lorsqu'il existe une application linéaire notée $\mathrm{d}f(a)$ telle que $f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a).h + \mathrm{o}(\|h\|)$.
Définition du gradient lorsque f est à valeurs réelles.

Dérivées partielles. Si f possède une différentielle en a, f admet en a des dérivées partielles, et $\mathrm{d}f(a).h = \sum_{k=1}^{p} \partial_k f(a) h_k$.

Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ admet en tout point de $\mathcal{U}$ des dérivées partielles continues alors f admet en tout point une différentielle. On dit alors que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Règle de la chaîne. Dérivation de $\phi(t) = f(x_1(t), \ldots, x_p(t))$.
Application au calcul du gradient en coordonnées polaires, à la résolution d'équations aux dérivées partielles (on donne le changement de variable).

Extremums locaux. Si $\mathcal{U}$ est ouvert et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et possède un extremum local en $a \in \mathcal{U}$ alors $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Prévision

La même chose.