Semaine du 8 au 12 mars 2021

Équations différentielles

Équations linéaires scalaires du premier ordre

Équation dite « sous forme résolue » : $x' = u(t)x + v(t)$, équation homogène associée. Structure affine des solutions, résolution (entre autre par la méthode dite de « variation de la constante »).

Le problème de Cauchy. L'équation différentielle $x' = u(t)x + v(t)$ admet en tout point $(t_0, x_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}$ une unique solution au problème de Cauchy.

Systèmes d'équations différentielles linéaires

Systèmes de la forme : $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t)$; l'unicité de la solution au problème de Cauchy est un résultat admis.
Résolution dans le cas particulier où A est une matrice constante diagonalisable ou trigonalisable.
Dans le cas général, l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension n dont la direction est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène : $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}$.
Si $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ est un système fondamental de solutions du système linéaire homogène, on introduit la matrice *wronskienne* $\mathrm{W} : t \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1(t) & \cdots & \mathrm{X}_n(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Toute solution de l'équation homogène s'exprime : $\mathrm{X} = \mathrm{W}(t)\mathrm{V}$ où V est un vecteur constant quelconque. Définition du *Wronskien*.

La méthode dite de « variation des constantes ». (hors programme mais vu en classe). Elle consiste à effectuer le changement de fonction inconnue $\mathrm{X} = \mathrm{W}(t)\mathrm{Y}$ pour résoudre l'équation générale.

Équations différentielles scalaire du second ordre

Le cas des coefficients constants (révision de première année).
Sytème différentiel du premier ordre équivalent, avec pour conséquences :

Le problème de Cauchy. L'équation différentielle $x'' = u(t)x' + v(t)x + w(t)$ admet en tout point $(t_0, x_0, x'_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ une unique solution au problème de Cauchy.
L'ensemble des solutions de l'équation homogène forme un espace vectoriel de dimension 2.
L'ensemble des solutions de l'équation générale peut être décrit comme la somme d'une solution particulière et d'une solution quelconque de l'équation homogène.

Méthode de Lagrange. (hors programme mais vu en classe) pour trouver les solutions générales de l'équation homogène à partir d'une solution particulière.

Wronskien.

Prévision

Fonctions de plusieurs variables.