Semaine du 8 au 12 février 2021

Espaces euclidiens

Définition d'un produit scalaire dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire, orthogonalité.
Bases orthonormées, expression du produit scalaire dans une telle base.

Projection orthogonale. Dans un espace de dimension *quelconque*, projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel H de dimension *finie*. Deux définitions équivalentes sont à connaître :

- si $(e_1,\dots,e_k)$ est une base orthonormée de H, $p(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k} \langle e_j \mid x\rangle e_j$;
- $p(x)$ est l'unique vecteur vérifiant $\begin{cases} p(x) \in \mathrm{H} \\ x - p(x) \in \mathrm{H}^{\perp} \end{cases}$

Orthonormalisation de Gram-Schmidt. Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille libre. Il existe une unique famille orthonormée $(e_1,\dots,e_p)$ telle que : $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_k) = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$ et $\langle e_k \mid x_k\rangle > 0$. Construction effective.

Isométries vectorielles. Préservation du produit scalaire, de la norme, exemple des symétries orthogonales, des réflexions.
Interprétation matricielle : le groupe $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Orientation de l'espace : le groupe $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
Étude des isométries vectorielles du plan (rotations et symétries orthogonales).

Endomorphismes symétriques. Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée.

Prévision

Équations différentielles.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- Preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ;
- existence de bases orthonormées en dimension finie ;
- Toute forme linéaire d'un espace euclidien s'écrit $x \longmapsto \langle a \mid x\rangle$ avec a unique ;
- définition d'une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie ;
- orthonormalisation de Gram-Schmidt ;
- classification du groupe $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ des isométries vectorielles en dimension 2 ;
- les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux-à-deux orthogonaux.