

Semaine du 25 janvier au 29 janvier 2021

Espaces probabilisés

Tribus et probabilités. Définition d'une tribu (contient l'univers Ω , est stable par complémentaire et union dénombrable), propriétés usuelles des tribus.

Définition d'une probabilité sur une tribu, propriétés usuelles des probabilités.

Théorème de la limite monotone, propriété de sous-additivité.

Cas d'un univers dénombrable. Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ à partir des singletons.

Conditionnement en indépendance. Notion de probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées.

Notion de système complet d'événements, formule des probabilités totales. Formule de Bayes.

Indépendance de deux événements, indépendance d'une famille finie ou dénombrable d'événements.

Variables aléatoires

Nous ne prenons en considération que les variables aléatoires *discrètes*.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire.

Lois discrètes classiques : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi géométrique, loi binomiale, loi de Poisson.

Loi des événements rares. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et $\lim np_n = \lambda$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

couple de variables aléatoires. Loi conjointe et lois marginales ; variables aléatoires indépendantes.

Espérance et variance. Définition et propriétés élémentaires, calcul de l'espérance et de la variance pour les lois usuelles.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Covariance et coefficient de corrélation. Loi faible des grands nombres.

Séries génératrices d'une variable aléatoire à valeurs entières. On admet que X possède une espérance si et seulement si sa série génératrice G_X est dérivable en 1, et que dans ce cas, $E(X) = G'_X(1)$. Résultat analogue pour la variance.

Série génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes : $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Prévision

Espaces euclidiens.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- la loi géométrique est sans mémoire ;
- preuve de la loi des événements rares ;
- calcul de l'espérance et de la variance pour une des lois usuelles ;
- formule de Koenig-Huyghens ;
- inégalité de Bienaymé-Tchebychev et loi faible des grands nombres ;