

Semaine 13 du 6 au 10 janvier 2025

Espaces probabilisés

Tribus et probabilités. Définition d'une tribu (contient l'univers Ω , est stable par complémentaire et union dénombrable), propriétés usuelles des tribus.

Définition d'une probabilité sur une tribu, propriétés usuelles des probabilités.

Théorème de la limite monotone, propriété de sous-additivité.

Cas d'un univers dénombrable. Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ à partir des singletons.

Conditionnement en indépendance. Notion de probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées.

Notion de système complet d'événements, formule des probabilités totales. Formule de Bayes.

Indépendance de deux événements, indépendance d'une famille finie ou dénombrable d'événements.

Variables aléatoires

Nous ne prenons en considération que les variables aléatoires *discrètes*.

Lois discrètes classiques : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi géométrique, loi binomiale, loi de Poisson.

Loi des événements rares. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et $\lim np_n = \lambda$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe et lois marginales ; variables aléatoires indépendantes ; lemme des coalitions (résultat admis).

Espérance. Définition de l'espérance et premières propriétés (linéarité, croissance, espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes).

Attention. Pas de variance cette semaine.

Prévision

Encore des probabilités, avec en sus les notions de variance et de covariance, les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, la loi faible des grands nombre et les séries génératrices.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- la loi géométrique est sans mémoire (ainsi que sa réciproque) ;
- si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires i.i.d telles que $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$;
- preuve de la loi des événements rares ;

Exercices à préparer pour les séances de TD

Les exercices 25, 27, 30, 36, 37 de la fiche « Probabilités ».