Semaine 12 du 18 au 22 décembre 2023

Le théorème de convergence dominée

Les théorèmes de cette partie sont admis. Il n'est désormais plus nécessaire d'expliciter les hypothèses relatives à la continuité par morceaux.

Théorème de convergence dominée. Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs numériques, continues par morceaux sur I. On suppose que :

- (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction ϕ positive et intégrable sur I, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leqslant \phi \quad \text{(hypothèse de domination).}$$

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I, et : $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n$.

Intégration terme à terme d'une série de fonctions. Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur I. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement et que la somme est continue par morceaux. On suppose de plus que la série $\displaystyle\sum \int_{\mathrm{I}} |f_n|$ est convergente. Alors la fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I, et $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n$.

Méthode alternative pour intervertir somme et intégrale. Au lieu d'appliquer le théorème précédent on peut aussi utiliser l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} f_n + \mathrm{R}_{\mathrm{N}}$ et appliquer le théorème de convergence dominée pour prouver que $\displaystyle\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \int_{\mathrm{I}} \mathrm{R}_{\mathrm{N}} = 0$.

Intégrales dépendant d'un paramètre. Théorèmes de continuité et de dérivabilité des fonctions de la forme

$$g : x \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

où I est un intervalle quelconque.
Extension du théorème de dérivabilité au cas de la classe $\mathscr{C}^k$.

Théorème de convergence dominée (version continue). On suppose que :

- pour tout $t \in \mathrm{I}$, $f(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell(t)$, la fonction ℓ étant continue par morceaux sur A ;
- il existe une application ϕ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in \mathrm{A}\times\mathrm{I}, \quad |f(x,t)| \leqslant \phi(t) \quad \text{(hypothèse de domination).}$$

Alors ℓ est intégrable sur I, et $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to a}{\to} \int_{\mathrm{I}} \ell(t)\,\mathrm{d}t$.

Prévision

La même chose, peut-être le début du cours de probabilité.

Exercices à préparer pour les séances de TD

Les exercices 27, 40, 45, 55, 56 de la fiche « Intégration ».