Semaine du 4 au 8 janvier 2021

Le théorème de convergence dominée

Les théorèmes de cette partie sont admis.

Théorème de convergence dominée. Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs numériques, continues par morceaux sur I. On suppose que :

- (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction positive ϕ, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leqslant \phi \quad \text{(hypothèse de domination).}$$

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I, et : $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n$.

Intégration terme à terme d'une série de fonctions. Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs numériques, continues par morceaux et intégrables sur I. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux et que la série $\sum \int_{\mathrm{I}} |f_n|$ est convergente. Alors la fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I, et $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n$.

Méthode alternative pour intervertir somme et intégrale. Au lieu d'appliquer le théorème précédent on peut aussi utiliser l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} f_n + \mathrm{R}_{\mathrm{N}}$ et appliquer le théorème de convergence dominée pour prouver que $\displaystyle\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \int_{\mathrm{I}} \mathrm{R}_{\mathrm{N}} = 0$.

Intégrales dépendant d'un paramètre. Théorèmes de continuité et de dérivabilité des fonctions de la forme

$$g : x \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

où I est un intervalle quelconque.
Extension du théorème de dérivabilité au cas de la classe $\mathscr{C}^k$.

Prévision

Probabilités.

Remarque. Pas de question de cours cette semaine, mais veiller à ce que les énoncés des théorèmes utilisés soient précis.