Semaine du 14 au 18 décembre 2020

PC* - 11

Intégration sur un intervalle

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est *convergente* lorsque la limite : $\lim_{x \to b x<b} \int_a^x f(t)\,dt$ existe. Cas des intervalles $]a, b]$ et $]a, b[$.
Pratique du changement de variable et de l'intégration par partie.

Fonctions à valeurs positives. Théorèmes de comparaison (majoration, domination, équivalence). Intégrales de référence à connaître : $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$.

Absolue convergence. Définition de l'absolue convergence, de la semi-convergence. Toute intégrale absolument convergente est convergente. Notion de fonction intégrable sur un intervalle.
Exemple de l'intégrale de Dirichlet semi-convergente $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$ (valeur admise).

Espaces $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{L}^2$. On pose $\mathcal{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathscr{C}^0_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{K}) \;\middle|\; f \text{ est intégrable} \right\}$ et $\mathcal{L}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathscr{C}^0_{pm}(\mathrm{I}, \mathbb{K}) \;\middle|\; f^2 \text{ est intégrable} \right\}$.
Il s'agit de deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $(f, g) \in \mathcal{L}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K}) \Longrightarrow fg \in \mathcal{L}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.
Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathcal{L}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.

Le théorème de convergence dominée

Les deux théorèmes de cette partie sont admis.

Théorème de convergence dominée. Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs numériques, continues par morceaux sur I. On suppose que :

- (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction positive ϕ, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leqslant \phi \quad \text{(hypothèse de domination).}$$

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I, et : $\int_\mathrm{I} f = \lim_{n \to +\infty} \int_\mathrm{I} f_n$.

Intégration terme à terme d'une série de fonctions. Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs numériques, continues par morceaux et intégrables sur I. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux et que la série $\sum \int_\mathrm{I} |f_n|$ est convergente. Alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I, et $\int_\mathrm{I} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\mathrm{I} f_n$.

Méthode alternative pour intervertir somme et intégrale. Au lieu d'appliquer le théorème précédent on peut aussi utiliser l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} f_n + \mathrm{R_N}$ et appliquer le théorème de convergence dominée pour prouver que $\lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \int_\mathrm{I} \mathrm{R_N} = 0$.

Remarque. Pas de question de cours cette semaine, mais veillez à ce que les énoncés des théorèmes utilisés soient précis.

Prévision

Intégrales dépendant d'un paramètre.