PC*

Semaine 10 du 1 au 5 décembre 2025

Séries de fonctions

Séries de fonctions. Convergence simple et absolue d'une série de fonctions ; convergence uniforme et normale d'une série de fonctions.
Une série $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si $\lim\limits_{+\infty} \|r_n\|_\infty = 0$.
Toute série normalement convergente est uniformément convergente.

Remarque. Étant donné une suite ou une série de fonctions, il faut savoir déterminer sur quels intervalles la convergence est uniforme.

Régularité de la limite uniforme. Continuité de la limite uniforme d'une série de fonctions continues, théorème d'interversion des passages à la limite, intégration sur un segment de la limite uniforme d'une série de fonctions, théorème de dérivation et son extension à la classe $\mathscr{C}^n$.

Méthode de *recouvrement* pour prouver la continuité ou la dérivabilité.

Séries entières

Définition d'une série entière d'une variable complexe $\sum a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$.

Lemme d'Abel. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$ la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
Définition du rayon de convergence : $\mathrm{R}_a = \sup\left\{\rho \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \text{la suite } (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\right\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
Utilisation de la règle de d'Alembert pour calculer un rayon de convergence.
Comparaison du rayon de convergence de deux séries entières : si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ alors $\mathrm{R}_b \leqslant \mathrm{R}_a$.

Opérations algébriques sur les séries entières. Rayon de convergence de la somme de deux séries entières, du produit de deux séries entières ; rayon de convergence de la série dérivée.

Prévision

Séries entières d'une variable réelle : régularité, développements usuels.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- preuve de la continuité en a de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues en a ;
- intégration sur un segment de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues ;
- dérivation de la limite simple d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ lorsque la suite des dérivées converge uniformément ;
- pour une série de fonctions, la convergence normale entraîne la convergence uniforme ;
- $|z| < \mathrm{R}_a \Longrightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument, et $|z| > \mathrm{R}_a \Longrightarrow \sum a_n z^n$ diverge grossièrement ;
- si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ alors $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_b$.
- rayon de convergence de la série dérivée.

Exercices à préparer pour les séances de TD

Les exercices 1, 5, 6, 7 et 8 de la fiche « Séries entières »