Semaine 10 du 2 au 6 décembre 2024

PC*

Séries de fonctions

Séries de fonctions. Convergence simple et absolue d'une série de fonctions ; convergence uniforme et normale d'une série de fonctions.
Une série $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si $\lim\limits_{+\infty} \|r_n\|_\infty = 0$.
Toute série normalement convergente est uniformément convergente.

Remarque. Étant donné une suite ou une série de fonctions, il faut savoir déterminer sur quels intervalles la convergence est uniforme.

Régularité de la limite uniforme. Continuité de la limite uniforme d'une série de fonctions continues, théorème d'interversion des passages à la limite, intégration sur un segment de la limite uniforme d'une série de fonctions, théorème de dérivation et son extension à la classe $\mathscr{C}^n$.

Méthode de *recouvrement* pour prouver la continuité ou la dérivabilité.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- preuve de la continuité en a de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues en a ;
- intégration sur un segment de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues ;
- dérivation de la limite simple d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ lorsque la suite des dérivées converge uniformément ;
- pour une série de fonctions, la convergence normale entraîne la convergence uniforme ;

Exercices à préparer pour les séances de TD

Les exercices 17 et 19 de la fiche « Suites et séries de fonctions »
Les exercices 1, 2 et 7 de la fiche « Séries entières »