

## Séries numériques

Révision du programme de la semaine précédente.

### Suites et séries de fonctions

**Suites de fonctions.** Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions définies sur un intervalle, à valeurs réelles ou complexes.

Si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ , elle converge aussi simplement vers  $f$ .

**Régularité de la limite uniforme.** Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues, théorème de la double limite (résultat admis), intégration sur un segment de la limite uniforme d'une suite de fonctions, théorème de dérivation et son extension à la classe  $\mathcal{C}^n$ .

Méthode de *recouvrement* pour prouver la continuité ou la dérivabilité.

**Séries de fonctions.** Convergence simple et absolue d'une série de fonctions; convergence uniforme et normale d'une série de fonctions.

Une série  $\sum f_n$  converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_\infty = 0$ .

Toute série normalement convergente est uniformément convergente.

**Remarque.** Étant donné une suite ou une série de fonctions, il faut savoir déterminer sur quels intervalles la convergence est uniforme.

**Attention.** Je n'ai pas encore traité l'adaptation des théorèmes de régularité aux séries de fonction. Pour ces dernières, il faut donc se cantonner à l'étude de la convergence normale ou uniforme.

### Prévision

Séries de fonctions.

### Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- preuve de la continuité en  $a$  de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues en  $a$ ;
- intégration sur un segment de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues;
- dérivation de la limite simple d'une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  lorsque la suite des dérivées converge uniformément;
- pour une série de fonctions, la convergence normale entraîne la convergence uniforme.

### Exercices à préparer pour les séances de TD

Les exercices 7, 8, 9 et 10 de la fiche « suites et séries de fonctions ».