Semaine 8 du 18 au 22 novembre 2024

PC*

Séries numériques

Définition de la suite des sommes partielles et du reste (en cas de convergence) d'une série numérique. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0. Exemple des séries géométriques.

▸ Séries de nombres réels positifs

Lorsque la série $\sum u_n$ est à terme général positif, la suite des sommes partielles est croissante.

Théorèmes de comparaison. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs telles que : $u_n = \mathrm{O}(v_n)$. Alors la convergence de la série $\sum v_n$ entraine celle de $\sum u_n$, et la divergence de $\sum u_n$ celle de $\sum v_n$.
Lorsque (u_n) et (v_n) sont positives et $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Règle de d'Alembert. Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs, telle que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a$. Si $a < 1$, la série $\sum u_n$ converge ; si $a > 1$ elle diverge.

Comparaison à une intégrale. Si $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ est continue par morceaux et décroissante, la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
Encadrement des sommes partielles en cas de divergence, des restes en cas de convergence.
Étude de la convergence des séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$.

▸ Séries numériques à terme général réel ou complexe

Critère spécial des séries alternées. Si la suite (a_n) décroit et tend vers 0, la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge, et le reste $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ est du signe de $(-1)^{n+1} a_{n+1}$ et vérifie : $|r_n| \leqslant a_{n+1}$.

Séries absolument convergentes. Lorsque la série $\sum |u_n|$ converge, il en est de même de $\sum u_n$.

Prévision

Suites et séries de fonctions.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- la preuve du théorème de comparaison ;
- la règle de d'Alembert ;
- étude des séries de Riemann ;
- preuve du critère spécial relatif aux séries alternées ;
- toute série absolument convergente est convergente.

Exercices à préparer pour les séances de TD

L'exercice 13 du cours « suites et séries numériques » ;
Les exercices 27, 29, 30 de la fiche d'exercices « suites et séries numériques ».