PC*

Semaine 7 du 12 au 15 novembre 2024

Suites et séries numériques

Définition d'une suite numérique bornée, d'une suite convergente.
Théorème de Cesàro et lemme de l'escalier.

▶ Cas des suites réelles

Divergence en $\pm\infty$.
Compatibilité avec la relation d'ordre : passage à la limite dans une inégalité, encadrement, minoration par des suites convergentes.
Suites monotones, suites adjacentes.
Notations de Landau, comparaison logarithmique.

Séries numériques

Définition de la suite des sommes partielles et du reste (en cas de convergence) d'une série numérique. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0. Exemple des séries géométriques.

▶ Séries de nombres réels positifs

Lorsque la série $\sum u_n$ est à terme général positif, la suite des sommes partielles est croissante.

Théorèmes de comparaison. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs telles que : $u_n = \mathrm{O}(v_n)$. Alors la convergence de la série $\sum v_n$ entraine celle de $\sum u_n$, et la divergence de $\sum u_n$ celle de $\sum v_n$.
Lorsque (u_n) et (v_n) sont positives et $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Règle de d'Alembert. Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs, telle que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a$. Si $a < 1$, la série $\sum u_n$ converge ; si $a > 1$ elle diverge.

Comparaison à une intégrale. Si $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ est continue par morceaux et décroissante, la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
Encadrement des sommes partielles en cas de divergence, des restes en cas de convergence.
Étude de la convergence des séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$;
- toute suite croissante et majorée converge ;
- deux suites adjacentes convergent vers la même limite ;
- preuve du théorème de Cesàro ;
- comparaison logarithmique avec une suite géométrique et application à la règle de d'Alembert ;
- étude des séries de Riemann.

Prévision

Séries numériques à terme général quelconque.

Exercices à préparer pour les séances de TD

Les exercices 13, 17, 19, 24 de la fiche « suites et séries numériques ».