Semaine du 16 au 20 novembre 2020

Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions. Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions définies sur un intervalle, à valeurs réelles ou complexes.
Si (f_n) converge uniformément vers f, elle converge aussi simplement vers f.

Séries de fonctions. Convergence simple et absolue d'une série de fonctions ; convergence uniforme et normale d'une série de fonctions.
Une série $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si $\lim\limits_{+\infty} \|r_n\|_\infty = 0$.
Toute série normalement convergente est uniformément convergente.

Remarque. Étant donné une suite ou une série de fonctions, il faut savoir déterminer sur quels intervalles la convergence est uniforme.

Régularité de la limite uniforme. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues, intégration sur un segment de la limite uniforme d'une suite de fonctions, théorème de dérivation et son extension à la classe $\mathscr{C}^n$.

Méthode de *recouvrement* pour prouver la continuité ou la dérivabilité.

Traduction de ces résultats dans la cas d'une série de fonctions.

Prévision

Séries entières.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- pour une série de fonctions, la convergence normale entraîne la convergence uniforme ;
- preuve de la continuité en a de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues en a ;
- intégration sur un segment de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues ;
- dérivation de limite simple d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ lorsque la suite des dérivées converge uniformément.