

## Semaine 6 du 4 au 8 novembre 2024

## Espaces préhilbertiens réels

Définition d'un produit scalaire dans un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire, orthogonalité.

Bases orthonormées, expression du produit scalaire dans une telle base.

**Projection orthogonale.** Dans un espace de dimension *quelconque*, projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel  $H$  de dimension *finie*. Deux définitions équivalentes sont à connaître :

- si  $(e_1, \dots, e_k)$  est une base orthonormée de  $H$ ,  $p(x) = \sum_{j=1}^k \langle e_j | x \rangle e_j$ ;
- $p(x)$  est l'unique vecteur vérifiant  $\begin{cases} p(x) \in H \\ x - p(x) \in H^\perp \end{cases}$

**Orthonormalisation de Gram-Schmidt.** Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille libre. Il existe une unique famille orthonormée  $(e_1, \dots, e_p)$  telle que :  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  et  $\langle e_k | x_k \rangle > 0$ . Construction effective.

**Isométries vectorielles.** Préservation du produit scalaire, de la norme, exemple des symétries orthogonales, des réflexions. Interprétation matricielle : le groupe  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

Orientation de l'espace : le groupe  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ .

Étude des isométries vectorielles du plan (rotations et symétries orthogonales).

**Endomorphismes autoadjoint.** Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable dans une base orthonormée.

Endomorphisme autoadjoint positif : si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , les deux conditions sont équivalentes :

- (i) pour tout  $x \in E$ ,  $\langle u(x) | x \rangle \geq 0$ ;
- (ii)  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ .

Énoncé équivalent pour un endomorphisme autoadjoint défini positif.

## Prévision

Suites et séries numériques.

## Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- Preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz;
- existence de bases orthonormées en dimension finie;
- Toute forme linéaire d'un espace euclidien s'écrit  $x \mapsto \langle a | x \rangle$  avec  $a$  unique;
- définition d'une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie;
- orthonormalisation de Gram-Schmidt;
- équivalence des définitions d'un endomorphisme autoadjoint (défini) positif.

## Exercices à préparer pour les séances de TD

Les exercices 18, 31 et 32 de la fiche « Espaces euclidiens ».

Les exercices 2, 3 et 4 de la fiche « suites et séries numériques ».