PC* - 5

Semaine du 2 au 6 novembre 2020

Séries numériques

Définition de la suite des sommes partielles et du reste (en cas de convergence) d'une série numérique. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0. Exemple des séries géométriques.

▶ Séries de nombres réels positifs

Lorsque la série $\sum u_n$ est à terme général positif, la suite des sommes partielles est croissante.

Théorèmes de comparaison. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs telles que : $u_n = \mathrm{O}(v_n)$. Alors la convergence de la série $\sum v_n$ entraine celle de $\sum u_n$, et la divergence de $\sum u_n$ celle de $\sum v_n$.
Lorsque (u_n) et (v_n) sont positives et $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Règle de d'Alembert. Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs, telle que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$. Si $a < 1$, la série $\sum u_n$ converge ; si $a > 1$ elle diverge.

Comparaison à une intégrale. Si $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ est continue par morceaux et décroissante, la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
Application à définition de la constante d'Euler. Encadrement du reste en cas de convergence.
Étude de la convergence des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

▶ Séries numériques à terme général réel ou complexe

Critère spécial des séries alternées. Si la suite (a_n) décroit et tend vers 0, la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge, et le reste $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ vérifie : $|r_n| \leqslant a_{n+1}$.

Séries absolument convergentes. Lorsque la série $\sum |u_n|$ converge, il en est de même de $\sum u_n$.

Produit de Cauchy. Convergence du produit de Cauchy de deux séries à termes positifs.
Convergence du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes (preuve non exigible).

Formule de Stirling. La formule de Moivre (il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que $n! \sim \mathrm{C}n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}$) et calcul de C par le biais des intégrales de Wallis.

Prévision

La même chose, avec en sus le début du cours sur les suites de fonctions.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- la preuve du théorème de comparaison ;
- la règle de d'Alembert ;
- comparaison à une intégrale ;
- étude des séries de Riemann ;
- preuve du critère spécial relatif aux séries alternées ;
- toute série absolument convergente est convergente.