

Semaine 4 du 7 au 11 octobre 2024

Réduction des endomorphismes

Valeurs et vecteurs propres, sous-espaces propres.

Polynôme caractéristique. Lien entre multiplicité des valeurs propres et dimension des sous-espaces propres.

Expression du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres lorsque le polynôme caractéristique est scindé.

Endomorphismes diagonalisables. Différentes caractérisations des endomorphismes diagonalisables par le biais des sous-espaces propres :

- existence d'une base formée de vecteurs propres ;
- la somme des sous-espaces propres est égale à E ;
- la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E ;
- le polynôme caractéristique est scindé et la dimension des sous-espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres associées.

Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable. Lorsque P est un polynôme et u diagonalisable, expression de $P(u)$ en fonction des valeurs propres et des projecteurs spectraux.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable. Si u est diagonalisable, les endomorphismes qui commutent avec u sont ceux qui laissent stables les sous-espaces propres.

Caractérisation de la diagonalisation par le biais de la recherche d'un polynôme annulateur. u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Lorsqu'on connaît le spectre de u , u est diagonalisable si et seulement si le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ annule u .

Application : l'induit d'un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est aussi diagonalisable.

Théorème de Cayley-Hamilton (preuve non exigible).

Trigonalisation. Un endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- la somme des sous-espaces propres est directe ;
- la dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre ;
- description justifiée du commutant d'un endomorphisme diagonalisable ;
- u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples ;
- Un endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Prévision

Espaces euclidiens

Exercices à préparer pour les séances de TD

Les exercices 19, 26, 29, 32, 35 de la fiche « réduction des endomorphismes ».