

# Semaine 3 du 30 septembre au 4 octobre 2024

## Réduction des endomorphismes

Valeurs et vecteurs propres, sous-espaces propres.

**Polynôme caractéristique.** Lien entre multiplicité des valeurs propres et dimension des sous-espaces propres.

Expression du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres lorsque le polynôme caractéristique est scindé.

**Endomorphismes diagonalisables.** Différentes caractérisations des endomorphismes diagonalisables par le biais des sous-espaces propres :

- existence d'une base formée de vecteurs propres ;
- la somme des sous-espaces propres est égale à  $E$  ;
- la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de  $E$  ;
- le polynôme caractéristique est scindé et la dimension des sous-espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres associées.

**Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable.** Lorsque  $P$  est un polynôme et  $u$  diagonalisable, expression de  $P(u)$  en fonction des valeurs propres et des projecteurs spectraux.

**Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.** Si  $u$  est diagonalisable, les endomorphismes qui commutent avec  $u$  sont ceux qui laissent stables les sous-espaces propres.

**Caractérisation de la diagonalisation par le biais de la recherche d'un polynôme annulateur.**  $u$  est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Lorsqu'on connaît le spectre de  $u$ ,  $u$  est diagonalisable si et seulement si le polynôme  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$  annule  $u$ .

Application : l'induit d'un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est aussi diagonalisable.

### Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- la somme des sous-espaces propres est directe ;
- la dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre ;
- description justifiée du commutant d'un endomorphisme diagonalisable ;
- $u$  est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples ;

### Prévision

La même chose, avec en sus le théorème de Cayley-Hamilton et la trigonalisation.

### Exercices à préparer pour les séances de TD

Les exercices 4, 9, 11, 17, 18, 21 de la fiche « réduction des endomorphismes ».