PC*

Semaine 2 du 23 au 27 septembre 2024

Espaces vectoriels et applications linéaires

Produit cartésien de deux espaces vectoriels.

Somme de sous-espaces vectoriels. Définition, sommes directes, sous-espaces supplémentaires. Exemple de la division euclidienne.

Projections vectorielles. Famille de projecteurs associée à une somme directe $E = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_p$.

Familles libres, génératrices, bases d'un espace vectoriel. Base adaptée à un sous-espace vectoriel, base adaptée à une décomposition de l'espace en somme directe.

Représentation matricielle. Matrice associée à un vecteur, à une famille de vecteurs. Matrice de passage entre deux bases, matrice associée à une application linéaire.
Formule de changement de base pour les vecteurs, les applications linéaires, les endomorphismes.

Trace. D'une matrice et d'un endomorphisme.

Base canonique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Théorème du rang. Version géométrique : si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire et H un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$, la restriction de u à H réalise un isomorphisme entre H et $\operatorname{Im} u$.
On en déduit lorsque E est de dimension finie : $\dim E = \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u)$.

Interpolation de Lagrange. Base de Lagrange de $\mathbb{K}_n[X]$, décomposition d'un polynôme dans cette base. Résolution du problème d'interpolation de Lagrange.

Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrée. Définition et application au calcul de l'inverse et des puissances lorsqu'un polynôme annulateur est connu.
Polynôme minimal ; son degré d est le plus petit entier pour lequel la famille $(\mathrm{Id}, u, \ldots, u^d)$ est liée.

Sous-espaces stables. Calcul par bloc.
Matrice dans une base adaptée à un sous-espace stable, déterminant d'une telle matrice.

Endomorphisme nilpotent. Cas où l'indice de nilpotence coïncide avec la dimension de l'espace.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- p est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p = p$;
- définition de la trace d'un endomorphisme ;
- théorème du rang (version géométrique) ;
- les polynômes de Lagrange forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$; expression d'un polynôme dans cette base.

Prévision

Réduction des endomorphismes.

Exercices à préparer pour les séances de TD

Les exercices 21, 29, 31, 32, 33 de la fiche « espaces vectoriels ».