

Semaine 1 du 16 au 20 septembre 2024

Espaces vectoriels et applications linéaires

Produit cartésien de deux espaces vectoriels.

Somme de sous-espaces vectoriels. Définition, sommes directes, sous-espaces supplémentaires. Exemple de la division euclidienne.

Projections vectorielles. Famille de projecteurs associée à une somme directe $E = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_p$.

Familles libres, génératrices, bases d'un espace vectoriel. Base adaptée à un sous-espace vectoriel, base adaptée à une décomposition de l'espace en somme directe.

Représentation matricielle. Matrice associée à un vecteur, à une famille de vecteurs. Matrice de passage entre deux bases, matrice associée à une application linéaire.

Formule de changement de base pour les vecteurs, les applications linéaires, les endomorphismes.

Trace. D'une matrice et d'un endomorphisme.

Base canonique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Théorème du rang. Version géométrique : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et H un supplémentaire de $\text{Ker } u$, la restriction de u à H réalise un isomorphisme entre H et $\text{Im } u$.

On en déduit lorsque E est de dimension finie : $\dim E = \dim(\text{Ker } u) + \dim(\text{Im } u)$.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- p est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p = p$;
- définition de la trace d'un endomorphisme ;
- théorème du rang (version géométrique).

Prévision

Suite et fin des révisions du programme de première année, début du chapitre sur la réduction des endomorphismes.

Exercices à préparer pour les séances de TD

Les exercices 6, 8, 10, 11, 13, 18 de la fiche « espaces vectoriels ».