TP

# Sommes de sous-ensembles

Dans ce sujet, nous nous intéressons au problème suivant : étant donnés une liste $L = [x_0, \dots, x_{n-1}]$ de $n$ entiers naturels et un entier $t$, existe-t-il des éléments $x_{i_1}, \dots, x_{i_p}$ de L vérifiant $x_{i_1} + \dots + x_{i_p} = t$ ?

## 1. Préliminaires

Dans la suite du sujet, nous aurons besoin de générer des suites d'entiers. Pour ce faire, on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$v_0 = 26 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = 353 \times v_{n-1} \bmod 997$$

**Question 1.** Rédiger une fonction qui prend pour argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et renvoie la liste $[v_0, v_1, \dots, v_{n-1}]$. Donner la valeur de :

a) $v_5$ b) $v_{47}$ c) $v_{86}$

## 2. Sommes de sous-ensembles

On résout le problème posé en préambule en calculant la plus grande somme des éléments d'un sous-ensemble de L qui soit inférieure ou égale à $t$ à l'aide de l'algorithme suivant :

1. on pose $S_0 = [0]$ ;
2. pour $i$ variant de 1 à $n$ :
   (a) on pose $S_i = S_{i-1} \cup (S_{i-1} + x_{i-1})$ (avec multiplicité)
   (b) on supprime de $S_i$ tout élément strictement supérieur à $t$
3. renvoyer le plus grand élément de $S_n$

où les $S_i$ sont des ensembles contenant les solutions possibles et où $S_i + x$ représente l'ensemble $\left\{ s + x \mid s \in S_i \right\}$.

**Question 2.** Donner la somme la plus grande possible atteignable qui soit inférieure ou égale à $t$, et le nombre de solutions (autrement dit la multiplicité dans $S_n$ de cette valeur) pour :

a) $(n,t) = (10, 4\,000)$ b) $(n,t) = (15, 4\,000)$ c) $(n,t) = (20, 5\,000)$

**Question 3.** Calculer la taille de la liste $S_n$ pour :

a) $(n,t) = (10, 4\,000)$ b) $(n,t) = (15, 4\,000)$ c) $(n,t) = (20, 5\,000)$

**Question 4.** Quelle est la complexité en temps et en mémoire de cet algorithme ?

Pour améliorer cette complexité, une solution consiste à représenter $S_i$ non plus par une liste mais par un dictionnaire dont les clefs sont les sommes atteignables et la valeur leur multiplicité.

**Question 5.** Modifier en conséquence votre fonction, et donner le nombre de solutions de la plus grande somme possible atteignable qui soit inférieure ou égale à $t$ :

a) $(n,t) = (40, 16\,000)$ b) $(n,t) = (45, 18\,000)$ c) $(n,t) = (50, 20\,000)$

## 3. Stratégie optimale pour un jeu

Considérons un ensemble d'entiers positifs $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ positionné dans cet ordre sur une ligne. On joue à un jeu contre un adversaire en jouant l'un après l'autre. À chaque tour, un joueur choisit soit le premier, soit le dernier nombre sur la ligne, l'enlève de façon permanente et reçoit ce nombre. L'objectif est de déterminer la somme maximale que l'on est certain de gagner lorsqu'on joue le premier.

Pour ce faire, on utilise la programmation dynamique : pour tout $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$ on note $M(i,j)$ la somme maximale que l'on est certain de gagner lorsqu'on joue le premier avec la liste $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$.

On note aussi $S(i,j) = \displaystyle\sum_{k=i}^{j} v_k$.

**Question 6.** Lorsque $i < j$, exprimer $\mathrm{M}(i,j)$ en fonction de $\mathrm{M}(i+1,j)$, $\mathrm{M}(i,j-1)$ et $\mathrm{S}(i,j)$, et en déduire une fonction utilisant le principe de la programmation dynamique pour calculer la somme maximale que l'on est certain de gagner. Donner cette somme maximale pour :

a) $n = 100$ b) $n = 300$ c) $n = 500$

## Les réponses attendues

**Question 1.**

*a)* $v_5 = \boxed{636}$ *b)* $v_{47} = \boxed{407}$ *c)* $v_{86} = \boxed{667}$

**Question 2.**

*a)* $(n,t) = (10, 4\,000) :$ $\boxed{3\,989,\ 1}$ *b)* $(n,t) = (15, 4\,000) :$ $\boxed{4\,000,\ 9}$ *c)* $(n,t) = (20, 5\,000) :$ $\boxed{5\,000,\ 292}$

**Question 3.**

*a)* $(n,t) = (10, 4\,000) :$ $\boxed{1\,020}$ *b)* $(n,t) = (15, 4\,000) :$ $\boxed{28\,048}$ *c)* $(n,t) = (20, 5\,000) :$ $\boxed{584\,459}$

**Question 5.**

*a)* $(n,t) = (40, 16\,000) :$ $\boxed{12}$ *b)* $(n,t) = (45, 18\,000) :$ $\boxed{6\,294}$ *c)* $(n,t) = (50, 20\,000) :$ $\boxed{57\,971}$

**Question 6.**

*a)* $n = 100 :$ $\boxed{23\,968}$ *b)* $n = 300 :$ $\boxed{78\,581}$ *c)* $n = 500 :$ $\boxed{123\,889}$