Travaux pratiques

Probabilités

Les exercices qui suivent sont des extraits d'oraux du concours Centrale dont je n'ai gardé que les questions de nature informatique.

Exercice 1 On considère un entier $N \geqslant 2$ et un réel $p \in]0,1[$. Une infinité de joueurs $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ participent à un tournoi : le match 1 oppose J_1 à J_0. Puis, pour $k \geqslant 2$, le match k oppose J_k au vainqueur du match $k-1$, ce dernier l'emportant avec la probabilité p. Le tournoi s'achève lorsqu'un même joueur parvient à enchaîner N victoires consécutives.
On note $T_{N,p}$ le nombre de matchs nécessaires pour qu'un joueur soit vainqueur.

a) Écrire une fonction Python `T(N, p)` qui renvoie $T_{N,p}$ suite à la simulation d'un tournoi.

b) Écrire une fonction `moyenne(N, p)` qui renvoie la moyenne des $T_{N,p}$ obtenus lors de 10^4 tournois.

c) Que donnent `moyenne(3, 0.7)` et `moyenne(6, 0.5)` ? (Vous devez trouver environ 4,47 et 63.)

Exercice 2 Une balle se déplace dans une série de $n+1$ cases ; au début de l'expérience elle se trouve dans la première et à chacune des n étapes elle avance d'une case ou reste immobile avec équiprobabilité.

a) Rédiger une fonction `experience(n)` qui renvoie la position finale de la balle après une expérience.

b) On réitère N fois cette expérience. Rédiger une fonction `simulation(n, N)` qui renvoie un tableau `t` à $n+1$ cases, `t[k]` étant égale à la proportion de balle dans la case k en position finale.

c) Tracer la courbe donnant cette proportion en fonction de k pour $n = 20$ et $N = 10^3$.

d) Lorsque N tend vers $+\infty$ la quantité $t[k]$ tend vers $\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}$. Superposer la courbe théorique à la courbe précédente.

e) On suppose désormais que la probabilité que la balle avance d'une case est égale à $p \in]0,1[$. Modifier la fonction `experience` et faire quelques essais pour différentes valeurs de p.

Exercice 3 La probabilité d'obtenir Pile en lançant une pièce est $p \in]0,1[$. On note E_n l'événement « ne jamais obtenir deux Pile d'affilée au cours des n premiers lancers » et p_n sa probabilité.

a) Rédiger une fonction `lancer(n, p)` qui simule une expérience et renvoie le bolléen `True` ou `False` selon que E_n est réalisé ou pas.

b) On admet que $p_{n+2} = (1-p)p_{n+1} + p(1-p)p_n$. Rédiger une fonction `proba(n, p)` qui renvoie la valeur p_n en utilisant cette relation, et comparer le résultat à celui d'une simulation.

c) On note T la variable aléatoire égale au plus petit entier $n \geqslant 2$ tel qu'on obtienne Pile aux lancers $n-1$ et n. On admet que cette variable aléatoire possède une espérance.
Rédiger une fonction `E(p)` qui estime la valeur de $\mathbb{E}(T)$ à partir de 10^4 simulations.

d) On admet que $\mathbb{E}(T) = \dfrac{1+p(1-p)}{p^2}$. Tracer sur un même graphique la valeur théorique et la valeur estimée de $\mathbb{E}(T)$ en faisant varier p dans $]0,1[$.

Exercice 4 Soit (X_k) une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes qui suivent la même loi, et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_k. On pose

$$Y = \sum_{k=1}^{N} X_k$$

On suppose que les X_k suivent une loi binomiale de paramètre (n,p) et N une loi de Poisson de paramètre λ.

a) Rédiger une fonction qui simule la variable aléatoire Y.

b) Estimer l'espérance et l'écart-type de Y pour $\lambda = 2$, $n = 10$, $p = 1/2$, puis comparer avec les valeurs théoriques. On admettra que $\mathbb{E}(Y) = \lambda np$ et $\sigma(Y) = \sqrt{\lambda np(1-p+np)}$.