

Percolation d'un tableau

Méthodologie

Les réponses attendues figurent au verso de cette page ; elles vous permettent de vérifier la justesse de votre code. Notez que pour certaines questions, vos algorithmes peuvent être corrects mais trop lents pour pouvoir fournir la réponse dans un temps raisonnable. Dans ce cas, il faudra réfléchir à une solution plus efficiente. Enfin, **n'oubliez pas de faire des sauvegardes régulières de votre travail** sous peine de devoir tout reprendre en cas de plantage du système.

Génération d'une suite

On note, pour toute la suite, $m = 2^{31} - 1$ et $u_0 = 3^{20} \bmod m$. On définit ensuite la suite (u_n) à l'aide de la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = (16807 \times u_n + 17) \bmod m$$

Il est vivement conseillé de calculer un grand nombre de valeurs de la suite (u_n) et de les stocker dans un tableau pour tout le reste du sujet.

Question 1. Donner les valeurs de :

$$a) \ u_5 \bmod 10000 \quad b) \ u_{2500} \bmod 10000 \quad c) \ u_{1000000} \bmod 10000$$

Question 2. On définit la suite (v_n) en posant $v_0 = u_0$, $v_1 = u_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_{n+1} - v_n + n^2$. Donner la valeur de $v_{1000} \bmod 10000$.

Question 3. Combien d'indices i vérifient la condition : $u_{i-3} + u_{i-2} + u_{i-1} \leq \frac{u_i}{2}$

$$a) \ \text{pour } 10 \leq i < 1500 ? \quad b) \ \text{pour } 2000 \leq i < 1000000 ?$$

Dans chacun des deux cas, donner les quatre dernier chiffre du plus petit des entiers u_i vérifiant cette condition.

Question 4. Soit q un entier. On s'intéresse à la suite (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n \bmod q$.

Ainsi, la suite (w_n) prend ses valeurs dans $\llbracket 0, q-1 \rrbracket$. On cherche le plus petit indice N_q à partir duquel $(w_n)_{n \leq N_q}$ aura parcouru toutes ces valeurs au moins une fois. Donner les valeurs de :

$$a) \ N_5 \quad b) \ N_{100} \quad c) \ N_{1000} \quad d) \ N_{10000}$$

Grilles

On choisit deux entiers n et q et on construit une grille carrée de n lignes et n colonnes notée $T(n, q)$ contenant, dans la ligne d'indice i ($0 \leq i < n$) et la colonne d'indice j ($0 \leq j < n$) le coefficient

$$T(n, q)[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si } u_{i \times n + j} \bmod 1000 < q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Question 5. Donner le nombre total de 1 dans les grilles :

$$a) \ T(5, 500) \quad b) \ T(200, 300)$$

Question 6. Donner l'indice de la ligne contenant le plus de 1 dans les grilles :

$$a) \ T(5, 500) \quad b) \ T(200, 300)$$

En cas d'égalité, on donnera le plus petit indice.

De proche en proche

Dans la grille, deux cases sont voisines si elles partagent une arête. On suppose que la grille est torique, c'est-à-dire que la case la plus à gauche d'une ligne est voisine de la case la plus à droite, et la case la plus basse d'une colonne est voisine de la case la plus haute. Ainsi, la case de coordonnées (i, j) possède toujours quatre voisines : les cases de coordonnées $(i - 1 \bmod n, j)$, $(i + 1 \bmod n, j)$, $(i, j - 1 \bmod n)$, $(i, j + 1 \bmod n)$.

À partir de la grille $T_0 = T(n, q)$ on construit la grille T_1 de la manière suivante : si $T_0[i, j] = 1$ alors $T_1[i, j]$ aussi ; si $T_0[i, j] = 0$ mais que la case de coordonnées (i, j) possède au moins deux voisines valant 1 dans T_0 alors $T_1[i, j] = 1$; dans les autres cas $T_1[i, j] = 0$.

Question 7. Pour chacune des grilles T_0 ci-dessous, donner le nombre de 1 dans la matrice T_1 :

- a) $T_0 = T(5, 500)$ b) $T_0 = T(10, 300)$ c) $T_0 = T(50, 600)$ d) $T_0 = T(1\,000, 100)$

Question 8. On poursuit ensuite le même processus pour construire une suite de grille (T_i) . Cette suite est constante à partir d'un certain rang T_N , c'est-à-dire l'entier N minimal pour lequel $T_N = T_{N+1}$. Donnes les valeurs de N pour les suites suivantes :

- a) $T_0 = T(5, 500)$ b) $T_0 = T(10, 300)$ c) $T_0 = T(50, 600)$ d) $T_0 = T(1\,000, 100)$

Question 9. Pour n fixé, on note q_0 la valeur de q minimale telle que, si $T_0 = T(n, q)$ alors T_N ne contient que des 1. Déterminer q_0 pour les valeurs de n suivantes :

- a) $n = 5$ b) $n = 10$ c) $n = 50$ d) $n = 800$

Les réponses attendues

Question 1.

$u_5 \bmod 10000 = \boxed{3121}$

$u_{2500} \bmod 10000 = \boxed{6419}$

$u_{1000000} \bmod 10000 = \boxed{2294}$

Question 2.

$v_{1000} \bmod 10000 = \boxed{9709}$

Question 3.

a) nombre d'indices : $\boxed{5}$

u_i minimal : $\boxed{542}$

b) nombre d'indices : $\boxed{5285}$

u_i minimal : $\boxed{4133}$

Question 4.

$N_5 = \boxed{18}$

$N_{100} = \boxed{480}$

$N_{1000} = \boxed{8377}$

$N_{10000} = \boxed{154149}$

Question 5.

a) Nombre de 1 : $\boxed{12}$

b) Nombre de 1 : $\boxed{11961}$

Question 6.

a) ligne maximale : $\boxed{1}$

b) ligne maximale : $\boxed{8}$

Question 7.

a) $\boxed{23}$

b) $\boxed{69}$

c) $\boxed{2335}$

d) $\boxed{147951}$

Question 8.

a) $N = \boxed{2}$

b) $N = \boxed{3}$

c) $N = \boxed{4}$

d) $N = \boxed{69}$

Question 9.

a) $q_0 = \boxed{264}$

b) $q_0 = \boxed{134}$

c) $q_0 = \boxed{71}$

d) $q_0 = \boxed{38}$