Longest repeated substring

Etant donnée une chaîne de caractères s, nous nous intéressons à la recherche du plus long facteur présent au moins deux fois dans s (*longest repeated substring problem*, ou problème LRS). Par exemple, si s = `aacaagtttacaagc`, le plus long facteur présent deux fois dans s est `acaag`, présent deux fois à partir des indices $i = 1$ et $j = 9$ de la chaîne. Il s'agit d'un problème ayant des applications en cryptographie et surtout en bio-informatique.
Pour tester les différentes fonctions que vous écrirez, récupérez sur le site `http://pc-etoile.schola.fr/` les trois fichiers nommés respectivement `essai1000.txt`, `essai10000.txt` et `essai100000.txt`. Chacun d'eux est constitué d'une seule ligne de respectivement 1 000, 10 000 et 100 000 caractères. Dans chacune de ces trois chaînes, le plus long facteur présent deux fois est unique et vaut :

- pour le fichier `essai1000.txt` : `'ggcctagcct'` ;
- pour le fichier `essai10000.txt` : `'acccgtcaggtgt'` ;
- pour le fichier `essai100000.txt` : `'ccaggtgagcgctcca'`.

```
f = open('chemin/vers/mon/fichier.txt', 'r')
c = f.readline()
f.close()

# c est alors une chaîne de caractères égale à la première ligne du fichier ouvert
```

Figure 1 – Script à utiliser pour importer une chaîne de caractères à partir d'un fichier texte.

Recherche par force brute

La démarche naïve consiste à tester tous les couples d'entiers $i < j$ à la recherche du plus long préfixe commun à $s[i:]$ et $s[j:]$.

Question 1.

a) Définir une fonction `prefixe(s, i, j)` qui prend en arguments une chaîne de caractères s et deux entiers distincts i et j et qui renvoie la longueur du plus long préfixe commun à $s[i:]$ et $s[j:]$.

b) En déduire une fonction `lrs1(s)` qui prend en argument une chaîne de caractères s et renvoie un des plus long facteurs présents au moins deux fois dans s.

c) Exprimer son coût en fonction de la longueur n de la chaîne de caractère s et de la longueur k de ce facteur.

d) Tester votre fonction sur les fichiers `essai1000.txt` et `essai10000.txt`, en calculant à chaque fois la durée d'exécution, puis estimez le temps qu'il faudrait pour exécuter `lrs1` sur le fichier `essai100000.txt`.

```
from time import time

d = -time()
# ici on place le script dont on souhaite mesurer le temps d'exécution
d += time()

# d contient alors la durée d'exécution en secondes.
```

Figure 2 – Mesure du temps en Python.

0	aacaagtttacaagc
1	acaagtttacaagc
2	caagtttacaagc
3	aagtttacaagc
4	agtttacaagc
5	gtttacaagc
6	tttacaagc
7	ttacaagc
8	tacaagc
9	acaagc
10	caagc
11	aagc
12	agc
13	gc
14	c

0	aacaagtttacaagc
11	aagc
3	aagtttacaagc
9	acaagc
1	acaagtttacaagc
12	agc
4	agtttacaagc
14	c
10	caagc
2	caagtttacaagc
13	gc
5	gtttacaagc
8	tacaagc
7	ttacaagc
6	tttacaagc

FIGURE 3 – À droite, le tableau des suffixes de s = aacaagtttacaagc rangé par ordre lexicographique.

Tableau des suffixes

Une façon d'accélérer le recherche consiste à considérer le *tableau des suffixes* de s, défini en regroupant les suffixes de s rangés par ordre lexicographique. La figure 3 représente tout d'abord les différents suffixes du mot s = aacaagtttacaagc rangés par leur rang puis par ordre lexicographique.
Pour des raisons d'occupation en mémoire, il serait maladroit de stocker les suffixes eux-mêmes alors qu'il suffit de stocker la position de leur premier caractère. Autrement dit, le tableau des suffixes de s = aacaagtttacaagc sera représenté par le tableau des entiers $t = [0, 11, 3, 9, 1, 12, 4, 14, 10, 2, 13, 5, 8, 7, 6]$.

Question 2.

a) Justifier que le plus long préfixe commun à deux suffixes se trouve dans deux suffixes *voisins* de ce tableau.

b) En déduire une fonction `lrs2(s, t)` qui prend en argument une chaîne de caractères s et son tableau des suffixes t et qui renvoie un des plus long facteurs présents au moins deux fois dans s.

c) Exprimer son coût en fonction de la longueur n de s et de la longueur k de ce facteur.

Calcul du tableau des suffixes

On se propose maintenant de calculer le tableau des suffixes en appliquant la méthode qui s'inspire du tri rapide pour trier efficacement des chaînes de caractères.
Le principe de ce tri est de segmenter le tableau des suffixes à partir d'une de leurs lettres. Par exemple, si on segmente les suffixes du mot s = aacaagtttacaagc à partir de leurs premières lettres en choisissant pour pivot la lettre c on obtient une segmentation en trois parties du tableau :

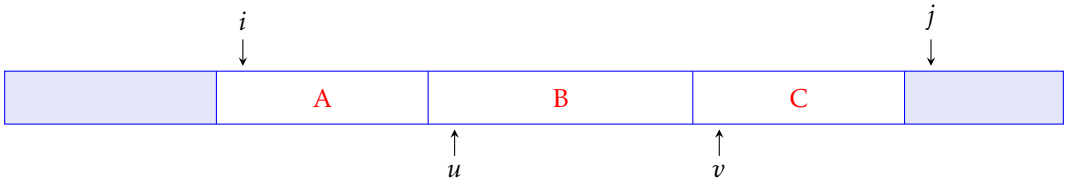
0	aacaagtttacaagc
1	acaagtttacaagc
3	aagtttacaagc
4	agtttacaagc
9	acaagc
11	aagc
12	agc

2	caagtttacaagc
10	caagc
14	c

5	gtttacaagc
6	tttacaagc
7	ttacaagc
8	tacaagc
13	gc

Le premier et le troisième de ces segments sont de nouveau segmentés à partir des premières lettres des mots qu'ils contiennent, tandis que le deuxième segment est segmenté à partir des *secondes* lettres des mots, puisqu'ils commencent tous par la lettre c. Le processus se répète ensuite récursivement.

Question 3. Rédiger une fonction `segmente(s, t, i, j, k)` qui prend en argument une chaîne de caractères s, le tableau des suffixes à segmenter t et trois entiers i, j, k, et qui réalise la segmentation du tableau $t[i:j]$ à partir de la $(k+1)^{e}$ lettre du suffixe de rang $t[i]$. Concrètement, après appel à `segmente(s, t, i, j, k)` le tableau t respectera l'invariant suivant :



$\forall x \in$ A, la $(k+1)^{e}$ lettre de $s[x:]$ est strictement inférieure au pivot choisi ;
$\forall x \in$ B, la $(k+1)^{e}$ lettre de $s[x:]$ est égale au pivot choisi ;
$\forall x \in$ C, la $(k+1)^{e}$ lettre de $s[x:]$ est strictement supérieure au pivot choisi.

En outre, cette fonction renverra le couple d'indices (u, v).
On notera que la $(k+1)^{e}$ lettre d'un suffixe $s[x:]$ n'existe pas dès lors que $x+k \geqslant n$. On conviendra que dans ce cas celle-ci est égale au caractère `' '` (un espace), caractère strictement inférieur à toute lettre de l'alphabet dans l'ordre lexicographique.

Question 4.

a) À l'aide de la fonction `segmente`, rédiger une fonction récursive `quick3way(s, t, i, j, k)` qui prend pour arguments la chaîne de caractères s, le tableau des suffixes t et qui trie en place la coupe $t[i:j]$ à partir de la $(k+1)^{e}$ lettre suivant la méthode *3-way radix quicksort*.

b) En déduire une fonction `suffixes(s)` qui prend en argument une chaîne de caractères s et qui renvoie le tableau trié de ses suffixes.

c) Tester cette méthode sur les trois fichiers `essai1000.txt`, `essai10000.txt` et `essai100000.txt`, en mesurant à chaque fois la durée d'exécution.

```
a a c a a g t t t a c a a g c a t g a t g c t g t a c t a g g a g a g t t a t a c t g g t c g
t c a a a c c t g a a c c t a a t c c t t g t g t g t a c a c a c a c t a c t a c t g t c g t
c g t c a t a t a t c g a g a t c a t c g a a c c g g a a g g c c g g a c a a g g c g g g g g
g t a t a g a t a g a t a g a c c c c t a g a t a c a c a t a c a t a g a t c t a g c t a g c
t a g c t c a t c g a t a c a c a c t c t c a c a c t c a a g a g t t a t a c t g g t c a a c
a c a c t a c t a c g a c a g a c g a c c a a c c a g a c a g a a a a a a a a a c t c t a t a t
```

FIGURE 4 – Un exemple avec une chaîne de longueur 282.