Corrigé

Longest repeated substring

Recherche par force brute

Question 1. Dans la fonction qui suit, on permute si nécessaire i et j pour avoir $i \leqslant j$ de sorte que le plus petit des deux suffixes est $s[j:]$.

```
def prefixe(s, i, j):
    k = 0
    if j < i:
        i, j = j, i
    while j + k < len(s) and s[i+k] == s[j+k]:
        k += 1
    return k
```

La recherche par force brute consiste alors à tester tous les couples (i, j) de suffixes distincts possibles :

```
def lrs1(s):
    n = len(s)
    u, m = n, 0
    for i in range(n-1):
        for j in range(i+1, n):
            k = prefixe(s, i, j)
            if k > m:
                u, m = i, k
    return s[u:u+m]
```

Le coût de la fonction prefixe est un $O(k)$, k désignant la longueur maximale des facteurs présents au moins deux fois dans s. Il en résulte immédiatement que le coût de la fonction `lrs1` est un $O(kn^2)$.
La fonction suivante va nous permettre de calculer facilement la durée d'exécution de cette fonction ainsi que de la suivante.

```
def test(fichier, methode):
    f = open(fichier, 'r')
    l = f.readline()
    f.close()
    d = -time()
    s = methode(l)
    d += time()
    print("lrs = {}, durée = {}.".format(s, d))
```

On obtient ensuite :

```
>>> test('essai1000.txt', lrs1)
lrs = 'ggcctagcct', durée = 0.5785138607025146.

>>> test('essai10000.txt', lrs1)
lrs = 'acccgtcaggtgt', durée = 59.04449510574341.
```

Comme on peut le constater, la longueur du plus long facteur présent deux fois croît assez faiblement avec n, ce qui va nous permettre de considérer l'entier k comme « presque constant » vis-à-vis de n. Avec cette hypothèse, la complexité est quadratique en n et on peut estimer le temps d'exécution de la fonction `lrs1` sur le fichier `essai100000.txt` à environ 6 000 secondes, soit 1h40.

Tableau des suffixes

Question 2. Supposons que le plus long facteur f présent deux fois dans la chaîne s soit préfixe des suffixes $s[i:]$ et $s[j:]$ et supposons ces deux préfixes non consécutifs dans le tableau des préfixes : il existe donc un suffixe $s[k:]$ tel que $s[i:] \preccurlyeq s[k:] \preccurlyeq s[j:]$, où $\preccurlyeq$ désigne l'ordre lexicographique. Mais puisque f est préfixe de $s[i:]$ et $s[j:]$ il doit être aussi préfixe de $s[k:]$. Ainsi, tous les suffixes rangés entre $s[i:]$ et $s[j:]$ dans le tableau des suffixes possèdent aussi le préfixe f, qui se trouve de fait présent dans deux suffixes consécutifs du tableau des suffixes.
Ainsi, la recherche du plus long facteur se résume à appliquer la fonction `prefixe` à deux suffixes voisins dans t :

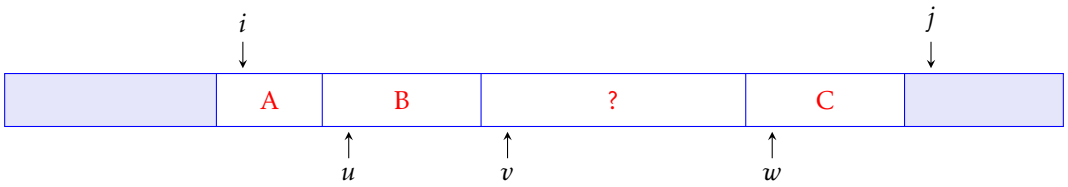
```
def lrs2(s, t):
    n = len(s)
    u, m = n, 0
    for i in range(n-1):
        k = prefixe(s, t[i], t[i+1])
        if k > m:
            u, m = t[i], k
    return s[u:u+m]
```

et la complexité de cette fonction est un $O(kn)$.

Calcul du tableau des suffixes

On notera que le tri *3-Way radix quicksort* utilisé date de 1997 et est à l'heure actuelle considéré comme le plus rapide pour trier des chaînes de caractères.

Question 3. La segmentation respecte l'invariant suivant :



$\forall x \in$ A, la $(k+1)^e$ lettre de $s[x:]$ est strictement inférieure au pivot p ;
$\forall x \in$ B, la $(k+1)^e$ lettre de $s[x:]$ est égale au pivot p ;
$\forall x \in$ C, la $(k+1)^e$ lettre de $s[x:]$ est strictement supérieure au pivot p.

```
def segmente(s, t, i, j, k):
    u, v, w = i, i + 1, j
    if t[i] + k < len(s):
        p = s[t[i]+k]
    else:
        p = ' '
    while v < w:
        if t[v]+k >= len(s) or s[t[v]+k] < p:
            t[u], t[v] = t[v], t[u]
            u += 1
            v += 1
        elif s[t[v]+k] == p:
            v += 1
        else:
            w -= 1
            t[v], t[w] = t[w], t[v]
    return u, v
```

Question 4. Le tri adopte une démarche naturellement récursive :

```
def quick3way(s, t, i, j, k):
    if i + 1 < j:
        u, v = segmente(s, t, i, j, k)
        quick3way(s, t, i, u, k)
        quick3way(s, t, u, v, k+1)
        quick3way(s, t, v, j, k)
```

Il reste à appliquer ce tri au tableau non trié des suffixes de s :

```
def suffixes(s):
    t = [i for i in range(len(s))]
    quick3way(s, t, 0, len(t), 0)
    return t
```

La fonction résolvant le problème LRS s'écrit enfin :

```
def lrs(s):
    return lrs2(s, suffixes(s))
```

Il reste à la tester sur nos trois fichiers exemples :

```
>>> test('essai1000.txt', lrs)
lrs = 'ggcctagcct', durée = 0.019194841384887695.

>>> test('essai10000.txt', lrs)
lrs = 'acccgtcaggtgt', durée = 0.23460102081298828.

>>> test('essai100000.txt', lrs)
lrs = 'ccaggtgagcgctcca', durée = 2.8753879070281982.
```