Énoncé des exercices

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $\mathrm{P}_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} x^k$.

1. À l'aide de l'ordinateur, tracer les courbes des fonctions P_n pour $-2 \leqslant x \leqslant 2$ et $1 \leqslant n \leqslant 10$. On utilisera la commande `plt.axis([-2,2,0,5])` afin de cadrer la fenêtre graphique.
   Que remarquez-vous sur les lieux où P_n atteint un minimum ?
2. Pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que $\mathrm{P}_n'(x) = \dfrac{u_n(x)}{(x-1)^2}$ où u_n est une fonction polynomiale à déterminer.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donner l'allure du tableau de variations de la fonction P_n. Montrer en particulier que P_n possède un minimum unique sur $\mathbb{R}$. Dans la suite on notera a_n le réel où P_n atteint son minimum.
4. Créer une fonction informatique `A` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie une valeur approchée de a_n.
5. Représenter graphiquement a_n en fonction de n pour $1 \leqslant n \leqslant 500$. Que peut-on conjecturer sur la limite de cette suite ?
6. Déterminer un équivalent simple de la quantité $\ln(2n+1-2na_n)$ puis, en exploitant la relation $\mathrm{P}_n'(a_n) = 0$, en déduire la limite de la suite (a_n).
7. On pose maintenant $a_n = -1 + h_n$. Déterminer un équivalent de h_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$, $\mathrm{P}_n = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$ et $\mathrm{A}_n = \mathrm{D}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ où $\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+x_n \end{vmatrix}$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de S_n et P_n.
2. Déterminer la loi de P_n. Les variables S_n et P_n sont-elles indépendantes ?
3. Coder une fonction qui, étant donné un vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$, renvoie la liste composée de $1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$, $\prod_{k=1}^{n} x_k$ et $\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)$.
4. Effectuer plusieurs simulations avec $n = 10$. Conjecture ? La prouver.
5. Tracer pour dix simulations la suite $\left(\dfrac{\mathrm{A}_n}{n}\right)_{1 \leqslant n \leqslant 200}$.
6. Déterminer l'espérance et la variance de A_n.
   Soit $\epsilon > 0$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(|\mathrm{A}_n| > \epsilon n\big) = 0$.

Exercice 3 On considère la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ avec $a_n = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

1. Démontrer que la série $\sum a_n$ converge.
2. *a)* Vérifier avec le logiciel la relation $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

   b) Démontrer avec rigueur ce résultat.
3. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1. On note f sa somme sur $]-1, 1[$.
4. *a)* Faire un tracé de f avec le logiciel et vérifier que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

   b) Démontrer avec rigueur ce résultat.
5. Faire un tracé de f' avec le logiciel et vérifier que f' admet une limite en 1.